

226: Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence
 $u_{m+1} = f(u_m)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Soit (E, d) espace métrique, $h \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Suites récurrentes

A Cas des suites réelles X.G 4.1 + exo

Définition 1: Une suite $(u_m) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire
 $\forall m \geq h, u_m = f(u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_{m-h})$ où $f: E^h \rightarrow E$ application.

Proposition 2: Soit $(u_m) \in E^{\mathbb{N}}$ récurrente d'ordre h pour $f: E^h \rightarrow E$ telle que $u_m \rightarrow l \in E$,
et f continue en $(l, \dots, l)$. Alors on a $l = f(l, \dots, l)$.

Proposition 3: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$ et
 $u_0 \in I, \forall m \in \mathbb{N}, f(u_m) = u_{m+1}$.

- i) Si f est croissante, (u_m) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$ (immédiat par récurrence).
- ii) Si f décroît, $f \circ f$ croît et (u_{2m}) et (u_{2m+1}) sont monotones de sens de monotonie opposé.

Exemple 4: Pour $f: [0, 4[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2-\sqrt{x}}$, la suite récurrente (u_m) telle que
 $u_{m+1} = f(u_m)$ vérifie:

- i) stationnaire si $u_0 = 1$ ou $(3+\sqrt{5})/2$
- ii) $(u_m) \rightarrow 1$ en croissant si $u_0 \in [0, 1[$
- iii) $(u_m) \rightarrow 1$ en décroissant si $u_0 \in]1, (3+\sqrt{5})/2[$
- iv) sinon (u_m) n'est pas définie

B Quelques familles de suites classiques X.G 4.1

Définition 5: On dit que $(u_m) \in E^{\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $a \in E$ et de
premier terme u_0 si pour tout $m \in \mathbb{N}$ $u_m = u_0 + ma$.

Proposition 6: Dans ce cas (u_m) converge si et seulement si $a = 0$ et dans ce cas $l = u_0$.

Définition 7: Une suite à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant une relation de récurrence
de la forme $u_{m+1} = q u_m$ est dite géométrique.

Proposition 8: Dans ce cas $u_m = q^m u_0 \forall m \in \mathbb{N}$ et on dit que (u_m) est une suite géométrique

Corollaire 9: Dans ce cas :

- i) Si $|q| > 1$ ou $q = -1$, la suite (u_m) diverge.
- ii) Si $|q| < 1$, (u_m) converge vers 0.
- iii) Si $q = 1$, (u_m) est constante.

Définition 10: On dit qu'une suite (u_m) (réelle ou complexe) vérifie une récurrence
homographique si elle vérifie une relation de récurrence du type
 $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = h(u_m)$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc \neq 0$.

Proposition 11: Soit (u_m) homographique et $(E): cx^2 - (a+d)x + b = 0$. Alors :

- i) Si (E) admet deux racines $\alpha \neq \beta$ alors on a :
 $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{u_m - \alpha}{u_m - \beta} = h^m \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $h = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
- ii) Si (E) admet une racine double α alors on a :
 $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_m - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + h^m$ où $h = \frac{c}{a - c\alpha}$

C Récurrences linéaires à coefficients constants X.G 4.1

Définition 12: On dit que $(u_m) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à
coefficients constants si :
 $\forall m \geq h, u_m = a_0 u_{m-1} + a_1 u_{m-2} + \dots + a_{h-1} u_{m-h}$ ($a_0, \dots, a_{h-1} \in E$) (*)

Proposition 13: L'équation $x^h - a_0 x^{h-1} - \dots - a_{h-1} = 0$ s'appelle équation caractéristique de
(*). Si on note $r_1, \dots, r_q$ ses racines et $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ leur ordre de multiplicité respectifs
alors l'ensemble des suites (u_m) vérifiant (*) est l'ensemble des suites de la forme :
 $u_m = P_1(m) r_1^m + \dots + P_q(m) r_q^m$ où $\forall i, P_i \in \mathbb{C}_\lambda[X]$

Exemple 14: Soit $u_0, u_1 \in \mathbb{C}, \forall m \geq 2, u_m = a u_{m-1} + b u_{m-2}$, $a, b \in \mathbb{C}$ d'équation
caractéristique $x^2 - ax - b = 0$. Alors :

- i) Si (E) a deux racines λ, μ , (u_m) est de la forme $u_m = \lambda x^m + \mu x^m \forall m \in \mathbb{N}$.
Les coefficients λ et μ sont déterminés à partir des équations $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda x + \mu x$.
- ii) Si (E) possède une racine double λ , (u_m) est de la forme $u_m = (\lambda m + \mu) \lambda^m \forall m \in \mathbb{N}$.
On détermine λ et μ grâce aux équations $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu) \lambda$.

Exemple 15: La suite de Fibonacci est définie par $u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$ donc
 $u_m = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^m - \psi^m)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

II Points fixes et suites récurrentes

A Théorème du point fixe de Picard 2.6 Has X.G 6.1

Théorème 16: Soient (X, d) un espace métrique complet et $g: X \rightarrow X$ une application contractante de rapport k . Alors on a:

- L'application g possède un unique point fixe $z \in X$.
- $\forall x \in X, z = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x)$, $d(z, g^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, g(x))$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque 17: i) Si $k = 1$ le résultat est faux.

ii) Si (X, d) n'est pas complet, le résultat est faux.

iii) Si (X, d) est un espace métrique et $g: X \rightarrow X$ est contractante alors $\forall x, y \in X, x \neq y$ on a $d(g(x), g(y)) < d(x, y)$. La réciproque est fautive.

Corollaire 18: Soient (X, d) un espace métrique complet et $g: X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que g^p soit contractante. Alors on a:

- g possède un unique point fixe $z \in X$.
- $\forall x \in X, z = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x)$.

Remarque 19: Dans le corollaire précédent on a posé implicitement g continue. Par exemple si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$, 0 sinon, alors g est discontinue, $g \circ g = 0$ donc $g \circ g$ est contractante et l'unique point fixe de g est 0.

Application 20 (Théorème de Cauchy - Lipschitz localement Lipschitzien) Soit $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement Lipschitzienne on la rend localement. Alors $\forall (t_0, z_0) \in \mathcal{D}$, il existe une unique solution $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $y(t_0) = z_0$. De plus cette solution est unique.

B Classification des points fixes Dom 4.2 X.G 4.2 exo

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi: I \rightarrow I$ de classe C^1 et $a \in I \cap \text{Fix}(\varphi)$.

Définition 21: On dit que a est un point attractif s'il existe $h \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a-h, a+h]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = a$.

Proposition 22: Si $|\varphi'(a)| < 1$ alors a est un point attractif.

Corollaire 23: Si g est de classe C^1 alors la convergence est quadratique et le point est dit superattractif.

Définition 24: On dit que a est un point fixe répulsif si il existe $h \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}$, $|\varphi(x) - a| > |x - a|$.

Proposition 25: Si $|\varphi'(a)| > 1$ alors a est un point fixe répulsif.

Remarque 26: Dans le cas où $|\varphi'(a)| = 1$, on ne peut pas conclure.

Développement (cas récurrent) Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$. Alors $(u_n) \rightarrow 0$ et si $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ alors $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right)$.

Exemple 27: $\varphi(x) = \sinh(x)$, $x \in [0, +\infty[$. Comme $\sinh(x) > x$ pour tout x on voit que le point fixe 0 est répulsif et que $\forall x_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x_0) = +\infty$.

C Application aux suites de polygones Iren.

Définition 28: On appelle barycentre de $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ le complexe $\frac{z_1 + \dots + z_m}{m} \in \mathbb{C}$.

Définition 29: Soient $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, alors $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_m & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$ est appelé déterminant circulant des a_i .

Développement $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_m & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{m-1} p(e^{2\pi i k/m})$ où $p = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1} X^j$.

Application 30: Soient $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, $p^0 = (z_1, \dots, z_m)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$

$p^{k+1} = \left(\frac{z_{1,1} + z_{1,2}}{2}, \dots, \frac{z_{1,m} + z_{1,1}}{2} \right)$. Alors $p_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (g, \dots, g)$

où $g = \text{isobar}(z_1, \dots, z_m)$.

III Méthodes de résolution d'équations

A Méthode de Newton Rou 4.3 exo 49

Soit $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de classe C^1 telle que $c < d$, $g(c) < 0 < g(d)$ et $\forall x \in [c, d]$, $g'(x) > 0$. Soit $F(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ et (x_n) la suite récurrente telle que $x_{n+1} = F(x_n)$.

Lemme 31: f admet un unique point fixe $a \in]c, d[$ et $\forall x \in [c, d]$
 $\exists z \in [a, x]$, $F(x) - a = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} (x-a)^2$

Lemme 32: Il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in [c, d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$
 et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par F .

Théorème 33 (Méthode de Newton) Soit $x_0 \in I$. Alors $x_n \rightarrow a$ et il existe
 $C > 0$ tel que $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

Corollaire 34: Si de plus $\forall x \in [c, d]$, $f''(x) > 0$, alors $I = [a, d]$ est stable
 par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante (ou croissante) avec
 $0 \leq x_{n+1} - a \leq (x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Exemple 35: Soit $y \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = x^2 - y$. Alors la méthode de Newton
 permet d'approcher $\sqrt{y}$.

B Méthodes itératives Cira 5.3 5.2

Définition 36: Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière tout
 couple $(H, N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ tel que $A = H - N$.

Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière (H, N) est:

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et } u_{k+1} = H^{-1}N u_k + H^{-1}b \quad \forall k \geq 0.$$

On dit que la méthode itérative converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{K}^n$ on a $u_n \rightarrow u$
 avec $Au = b$

Théorème 37: Une méthode itérative converge si et seulement si
 $\rho(H^{-1}N) < 1$ (rayon spectral)

Théorème 38: Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et (H, N) une décomposition régulière
 de A . Si la matrice $(H^* + N)$ est définie positive alors $\rho(H^{-1}N) < 1$.

C Minimisation de fonctionnelle quadratique Rom 5.15 [FACULTATIF]

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$

Théorème 39: Soit Q un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, φ une fonction définie sur Q à valeurs
 dans $\mathbb{R}$ et différentiable en $x_0 \in Q$. Si φ admet un extremum local en x_0 alors on a
 $d\varphi(x_0) = 0$.

Définition 40: On appelle fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute fonction φ définie
 sur $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Lemme 41: La fonctionnelle quadratique φ associée à la matrice A et au
 vecteur b est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ avec:
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d\varphi(x) = \nabla \varphi(x) = Ax - b$.

Théorème 42: La solution du système linéaire $Ax = b$ est le vecteur
 qui réalise le minimum global de la fonctionnelle quadratique φ .

Lemme 43: On note $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .
 Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$

Théorème 44 (méthode de gradient à pas optimal) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 définie par $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla \varphi(x_n)$ avec
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \arg \min_{\rho \in \mathbb{R}^+} \varphi(x_n - \rho \nabla \varphi(x_n))$, alors $x_n \rightarrow x_*$ où
 $x_* \in \mathbb{R}^n$ est l'unique minimum global de φ .

Références :

- Xavier Gouxon Analyse X.G
- J. P. Demailly Analyse numérique et Equations différentielles Dem
- Hassan Topologie générale et espaces métriques Has
- Garbet Analyse numérique matricielle Cia
- Rouvière petit guide de calcul différentiel Rou
- Isenmann Isen
- Rombaldi Analyse matricielle Rom

Annexe :

- Faire dessin de suites
- Dessin suite de polygones
- Dessin méthode du gradient à pas optimal
- Dessin méthode de Newton.