

224: Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

On considère $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point, tel que $0 \in I$.

I Développements asymptotiques et fonctions

A Développements asymptotiques 2.2.2 X.G.

Définition 1: Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle échelle de comparaison un ensemble E de fonctions définies au voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en x_0) et vérifiant la propriété suivante: si $f, g \in E$, alors $f = g$ ou bien $f = o(g)$ ou bien $g = o(f)$.

Exemple 2: Au voisinage de $+\infty$ ou 0 on prend souvent les échelles de comparaison suivantes:

$$\begin{aligned} & x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ & x \mapsto x^\alpha (\log x)^\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Définition 3: Soient $f: I \rightarrow E$ une application, x_0 un point d'accumulation de I et $E \subset \mathbb{R}^n$. On appelle développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison E au voisinage de a toute expression de la forme

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_k f_k, \quad \text{vérifiant:}$$

- $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ sont des constantes multiplicatives,
- $f_1, \dots, f_k \in E$ avec pour tout i , $f_{i+1}(x) = o(f_i(x))$ quand $x \rightarrow x_0$,
- $f(x) = C_1 f_1(x) + \dots + C_k f_k(x) + o(f_k(x))$.

Lorsqu'un tel développement existe par rapport à E pour f , il est unique. On a en particulier $f(x) \sim C_1 f_1(x)$ et on dit que $C_1 f_1$ est la partie principale (ou l'équivalent) de f au voisinage de a .

Exemple 4: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\int_x^{\infty} \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \dots + \frac{(k-1)!}{\log^k x} + o\left(\frac{x}{\log^k x}\right)$.

B Développements limités X.G 2.2.3 2.2.5

Définition 5: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que f admet un développement limité d'ordre m au voisinage de 0 s'il existe $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tel que, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + o(x^m).$$

Remarque 6: Un développement limité est aussi un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison constituée des fonctions de la forme $x \mapsto x^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Proposition 7: Si f admet un DL d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, il est unique. Si de plus f admet un DL d'ordre m au voisinage de 0 alors $f(0) = a_0$, f est dérivable et $f'(0) = a_1$.

Remarque 8: L'existence d'un DL d'ordre $m \geq 2$ n'assure pas l'existence de $f''(0)$. Par exemple $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, si $x \neq 0$, $f(0) = 1$ mais pas dérivable deux fois en 0 cependant $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0 .

Proposition 9: Soit $a_0 = \dots, f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ admettant au voisinage de 0 un DL d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m + o(x^m)$.

- Si f est paire alors $a_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
- Si f est impaire alors $a_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Proposition 10: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est m -fois dérivable en 0 , alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre m suivant: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m + o(x^m)$.

Corollaire 11: On a les DL d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 suivants:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m) & \ln x &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m!} + o(x^m) \\ (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-m+1)x^m}{m!} + o(x^m) & \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{m-1} x^{m-1} + o(x^m) \end{aligned}$$

C Opérations sur les développements limités X.G 2.2.4 2.2.5 2.2.6

Proposition 12: Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \in I$) deux applications admettant au voisinage de 0 un DL d'ordre m : $f(x) = P_m(x) + o(x^m)$, $g(x) = Q_m(x) + o(x^m)$ où P_m et Q_m sont deux fonctions polynomiales de degré $\leq m$. Alors:

- $f+g$ admet un DL d'ordre m donné par $(f+g)(x) = (P_m+Q_m)(x) + o(x^m)$.
- $f \cdot g$ admet un DL d'ordre m donné par $(fg)(x) = R_m(x) + o(x^m)$ où R_m est le reste de la division euclidienne de $P_m Q_m$ par X^{m+1} : $P_m Q_m = R_m + X^{m+1} S_m$, $\deg R_m \leq m$.
- Si $g(0) \neq 0$, f/g admet un DL d'ordre m donné par $(f/g)(x) = R_m(x) + o(x^m)$, où R_m est le quotient de la division euclidienne des polynômes P_m par Q_m à l'ordre m .

Proposition 13: Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \in I$) une application admettant un DL d'ordre m au voisinage de 0 , $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ intervalle $I_g \cap I \subset J$) admettant un DL d'ordre n au voisinage de $g_0 = g(0)$. On écrit au voisinage de 0 , $g(x) = g_0 + P_n(x) + o(x^n)$, $f(g(x)) = Q_n(x) + o(x^n)$ où P_n et Q_n sont deux polynômes de degré $\leq n$ avec $P_n(0) = 0$. Alors $f \circ g$ admet un DL d'ordre m au voisinage de 0 : $f \circ g(x) = R_m(x) + o(x^m)$ où R_m est le reste de la division euclidienne de $P_m \circ Q_n$ par X^{m+1} .

Application 14: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^9)$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

II Applications à l'intégration

A Intégration et dérivation des développements limités X.G 2.2.4

Proposition 15 (Intégration terme à terme) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'au voisinage de 0, $f'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$.

Alors f admet au voisinage de 0 un DL d'ordre $n+1$ donné par:

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple 16: En intégrant respectivement les DL de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$, on obtient:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Proposition 17 (Dérivation terme à terme) Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $m \geq 2$ fois dérivable en 0.

Si au voisinage de 0 on a $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + o(x^m)$, alors au voisinage de 0 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + ma_mx^{m-1} + o(x^{m-1})$.

Remarque 18: Sans l'existence de $f^{(m)}(0)$, le résultat est faux. (cf exemple 9).

B Relations de comparaison X.G 3.4.2

Théorème 19: Soient $[a, b[$ un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$)

$f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ localement intégrables sur $[a, b[$.

1) Si $\int_a^b g(x) dx$ diverge, alors lorsque $x \rightarrow b^-$,

$$\bullet f = o(g) \Rightarrow \int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right)$$

$$\bullet f = \omega(g) \Rightarrow \int_a^x f = \omega\left(\int_a^x g\right)$$

$$\bullet f \sim g \Rightarrow \int_a^x f \sim \int_a^x g$$

2) Si $\int_a^b g$ converge, alors lorsque $x \rightarrow b^-$,

$$\bullet f = o(g) \Rightarrow \int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)$$

$$\bullet f = \omega(g) \Rightarrow \int_x^b f = \omega\left(\int_x^b g\right)$$

$$\bullet f \sim g \Rightarrow \int_x^b f \sim \int_x^b g$$

Exemple 20: Au voisinage de $+\infty$, on a pour tout $d > 0$:

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^d}\right) \text{ donc } \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = o\left(\int_1^x \frac{1}{t^d} dt\right) = o(x^{1-d})$$

C Méthode de Laplace Rge exo 4-13 [FACULTATIF]

Théorème 21: Soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e^{-\lambda \varphi} g$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose g continue en a et $g(a) \neq 0$ et on pose $F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda \varphi(x)} g(x) dx$.

Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{e^{-\lambda \varphi(a)}}{\sqrt{\lambda}} g(a)$$

Application 22 (Formule de Stirling) Soit $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt$

$$\text{Alors } \Gamma(x+1) \sim x^{x+1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

III Développements asymptotiques et suites.

A Suites récurrentes Ex A 1.5 X.G 4.2

Définition 23: Une suite (u_n) est dite récurrente réelle et définie par la donnée de u_0 et que $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_{m+1} = g(u_m)$ où $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Théorème 24: Soit $l \in \mathbb{R}$. Une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en l si pour toute suite d'éléments de I (u_m) convergent vers l , $g(u_m) \rightarrow g(l)$.

Corollaire 25: Si $(u_m) \in I^{\mathbb{N}}$ converge vers l , alors nécessairement $l = g(l)$ i.e. l est un point fixe de g .

Développement: Soit (u_m) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\forall m \in \mathbb{N}$ $u_{m+1} = g(u_m)$ où $g: x \mapsto \tan x$.

$$\text{Alors } u_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\log m}{m\sqrt{m}} + o\left(\frac{\log m}{m\sqrt{m}}\right)$$

B Application à la méthode de Newton. Rge exo 19.

On considère $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 , $c < d$, $g(c) < 0 < g(d)$ et $g' > 0$. On considère la suite récurrente $x_{m+1} = F(x_m) \forall m \geq 0$ avec $F(x) = x - g(x)/g'(x)$.

Lemme 26: g admet un unique zéro $a \in]c, d[$ et $\forall x \in [c, d]$, $\exists z \in [c, x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{g''(z)}{g'(z)} (x-a)^2$

Lemme 27: Il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in [c, d], |f(x) - a| < C|x - a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est Fstable.

Développement Soit $x_0 \in I$, la suite (x_n) a une convergence d'ordre deux vers a dans I .

Corollaire 28: Si de plus $\forall x \in [c, d], f'(x) > 0$, alors $[c, d]$ est Fstable et pour $x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante (ou croissante) avec

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \quad \text{et si } x_0 > a \text{ alors:}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

Application 29: Soit $y > 0$ et $g(x) = x^2 - y$, alors la méthode de Newton permet d'approcher la valeur $\sqrt{y}$.

C Séries numériques 4.2.2 X.G

Théorème 30: Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge si (S_n) la suite des sommes partielles est majorée.

Corollaire 31: On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors: $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv; $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div.

Théorème 32: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- i) Si $v_n = o(u_n)$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
- ii) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 33: L'hypothèse de positivité est cruciale. Considérons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Application 34: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Théorème 35: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$. Alors:

- i) si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=m}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=m}^{\infty} v_k$
- ii) si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^m u_k \sim \sum_{k=0}^m v_k$

Application 36: On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Alors le développement asymptotique de H_n à trois termes est:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right) \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}$$

Proposition 37: Soit $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=n}^{\infty} g(k) - \int_n^{\infty} g(t) dt$ est convergente. En particulier $\sum g(n)$ et $\int g$ ont même nature.

Exemple 38: i) On retrouve le résultat de l'application 34.

ii) Si $g: x \mapsto \frac{1}{1+x}$ on retrouve le résultat de l'application 36.

Références :

Xavier Gourdon Analyse X.G

El Amrani Suites et séries numériques ELA.

Rouvière Petit guide de calcul différentiel Rou