

2.2.3 Suites numériques, convergence, valeurs d'adhérence. Exemples d'application.

On considère $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Convergence d'une suite numérique

A Limite d'une suite El Am 1.2

Définition 1: On dit que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{K}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2: Si $u_n = 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n$ alors (u_n) converge vers 1.

Théorème 3: Si (u_n) converge alors la limite est unique.

Proposition 4: Toute suite numérique convergente est bornée.

Remarque 5: La réciproque est fautive, prendre $u_n = (-1)^n$.

Proposition 6: Soient (u_n) et (v_n) telles que $\lim u_n = 0$ et (v_n) est bornée. Alors $\lim(u_n v_n) = 0$.

Théorème 7: Soit $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, alors f continue si et seulement si $\forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $((u_n) \rightarrow l) \Rightarrow (f(u_n) \rightarrow f(l))$.

B Cas particuliers de la convergence réelle El Am 1.2 1.3 2.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition 8: On dit que (u_n) est majorée (resp. minorée) si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq A$ (resp. $A \leq u_n$). Si (u_n) est majorée et minorée on dit que la suite est bornée.

Théorème 9: i) Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle a une limite finie et de plus on a $\lim u_n = \sup u_n$.

ii) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle a une limite finie et de plus on a $\lim u_n = \inf u_n$.

Théorème 10 (gendarmes): Soient $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang. Si (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite l alors (u_n) converge vers l .

Définition 11: Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si :

i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

ii) $\lim(u_n - v_n) = 0$

Théorème 12: Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes de même limite l . De plus on a $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout n .

Exemple 13: Les suites de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes de limite égale à 1.

Application 14: Critère des séries alternées: Si $u \in \mathbb{R}^+$ décroissante de limite 0 alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente et $S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Exemple 15: Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ est alternée et la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante et tend vers 0 donc la série converge.

II Notions plus faibles que la convergence

A Les suites de Cauchy El Am 1.6

Définition 16: On dit que (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N, |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Proposition 17: i) Toute suite convergente est de Cauchy.

ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

iii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même de Cauchy.

Lemme 18: Soit (u_n) de Cauchy. Supposons que (u_n) admette une suite extraite convergente, de limite l . Alors (u_n) converge vers l .

Théorème 19: Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple 20: la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ ne converge pas car pas de Cauchy.

B Convergence en moyenne de Césaire El Am exo 2.3 Irem

Définition 21: On dit que v est la suite des moyennes de Césaire de u

$$\text{si } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \text{ et on dit que } u \text{ converge au sens de Césaire si } v \text{ converge.}$$

Théorème 22: Si (u_n) converge alors (u_n) converge au sens de Cauchy. De plus on a $\lim u_n = \lim v_n$.

Remarque 23: La réciproque est fautive. Par exemple $(-1)^n$ diverge mais converge au sens de Cauchy.

Application 24: Soit P polygone de sommets $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et (P_k) la suite de polygones telle que $P_0 = P$ et pour laquelle les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

Alors (P_k) converge vers $(g, \dots, g)$ où $g = \text{baryc}(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$.

III Valeurs d'adhérence de suites numériques

A Lien entre valeurs d'adhérence et suites convergentes El Am 1.2 et 4

Définition 25: On appelle valeur d'adhérence de (u_n) , tout élément de $\mathbb{K}$ limite d'une suite extraite convergente de (u_n) .

Exemple 26: La suite de terme général $(-1)^n$ a pour valeurs d'adhérence -1 et 1 .

Proposition 27: Toute suite numérique convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

Remarque 28: On en déduit qu'une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Remarque 29: Une suite possédant une valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente. Considérons $u_n = (1 - (-1)^n)/n$.

Théorème 30 (Bolzano-Weierstrass) Dans $\mathbb{R}$, toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.

B Cas particuliers des valeurs d'adhérence les suites réelles et limites inférieures et supérieures Rom 4.7.

On considère $u \in \mathbb{R}^n$

Proposition 31. Les suites $\sup_{k \geq n} u_k$ et $\inf_{k \geq n} u_k$ convergent dans $\mathbb{R}$.

Définition 32: $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} u_k$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} u_k$

Proposition 33: $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ sont les valeurs d'adhérence de u .

Corollaire 34: $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de u et $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ la plus petite.

Exemple 35: Les valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont $[-1, 1]$ ex 6.16 Rom

Théorème 36: u converge si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)$. Dans ce cas $\liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$.

IV Suite récurrente d'ordre 1 et applications

A Définitions et exemples X.G 4.1 et 4.2

On considère $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

Définition 37: On dit que u est récurrente d'ordre 1 si $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 38: Si f est croissante alors (u_n) est monotone d'un sens de monotonie et borné par le signe de $u_1 - u_0$.

Si f décroît avec $f \circ f$ croît. On en déduit que (u_n) et (u_{n+1}) sont monotones de sens de monotonie opposé.

Définition 39: On dit que u est arithmétique si $f(x) = x + a$, $a \in \mathbb{K}$.

Proposition 40: Dans ce cas $u_n = u_0 + na$ et u converge si $a = 0$.

Définition 41: On dit que u est géométrique si $f(x) = qx$ où $q \in \mathbb{K}$.

Proposition 42: Dans ce cas $u_n = q^n u_0$ et u converge si $|q| < 1$ ou $q = -1$.

Définition 43: On dit que u vérifie une récurrence homogène si

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

Proposition 44: Soit (u_n) homogène. On note $cx^2 - (a-d)x + b = 0$ (E)

Si (E) admet deux racines $\alpha \neq \beta$ alors on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n - \alpha}{\beta - \alpha} = \left(\frac{\alpha - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^n \quad \text{d'où} \quad \frac{u_n - \alpha}{\beta - \alpha} = \left(\frac{\alpha - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^n$$

Si (E) admet une racine double α , alors on a:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_m - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + R_m \text{ où } R = \frac{C}{a - \alpha C}$$

Développement Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$
 et $\forall m \in \mathbb{N} \quad u_{m+1} = f(u_m)$.

Alors (u_n) tend vers 0 et $u_m = \sqrt{\frac{5}{n}} - \frac{3\sqrt{5}}{10} \frac{\log(m)}{m\sqrt{m}} + o\left(\frac{\log(m)}{m\sqrt{m}}\right)$

B Approche de points particuliers Has 2.6 Rem exo 4.49

Théorème 4.5 (point fixe de Picard) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application contractante de rapport k . Alors on a:

- L'application f possède un unique point fixe $z \in X$.
- $\forall x \in X, z = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ et $d(z, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)) \quad \forall n \geq 0$.

Lemme 4.6: Soit $f: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$, alors f admet un unique point fixe $a \in]c, d[$ et pour tout $x \in [c, d]$ il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(z)} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} (x-a)^2$

Lemme 4.7: Dans ce cas il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [c, d]$
 $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $I = [a - \lambda, a + \lambda]$ est F-stable.

Développement Dans ce cas soit $x_0 \in I$, alors $x_m \rightarrow a$ avec $x_{m+1} = F(x_m)$

Corollaire 4.8: Si de plus $f'' > 0$ alors $I = [a, d]$ est F-stable et pour tout $x_0 \in I, (x_m)$ est strictement décroissante (ou constante) avec
 $0 \leq x_{m+1} - a \leq C(x_m - a)^2$ et $x_{m+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_m - a)^2$

Application 4.9: Soit $g \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = x^2 - g$, alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{g}$. [ANNEXE]

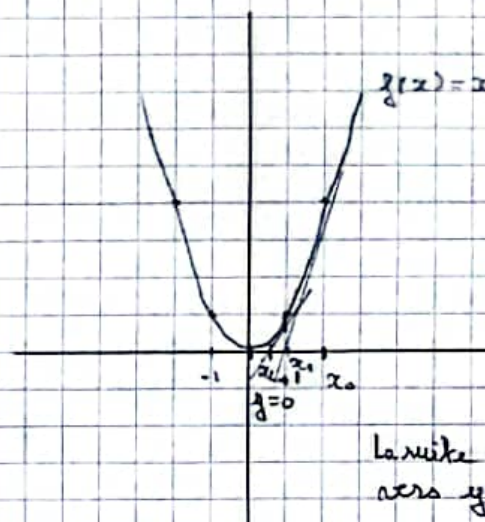
C Minimisation fonctionnelle quadratique Rem 5.15

Références

- Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions El Am El Amrani
- Éléments d'analyse réelle Rombaldi Rom
- Topologie générale et espaces normés Havin Hao
- Isenmann
- Xavier Gaudon Analyse X.G
- F. Rouvière Petit guide du calcul différentielle Rou

Autres sujets possibles : suite de polygones, thm du pt fixe.

Annexe :



La suite (x_n) converge vers $y=0$.