213 : Espaces de Hilbert. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. H un $\mathbb{K}$ ev. I ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$.

I Du préhilbertien à l'hilbertien

A Espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Li 2.1

Définition 1 : On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (ou hermitienne) qui est définie positive. On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Exemple 2 : i) le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ii) le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Remarque 3 : Si H est muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ alors H est naturellement muni de la norme $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$

Proposition 4 : $\forall x, y \in H$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 5 (Cauchy-Schwartz) $\forall x, y \in H$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Corollaire 6 : $\forall y \in H$, la forme linéaire : $\phi_y : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array}$ est continue et $\|\phi_y\| = \|y\|$

Définition 7 : On dit que $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Exemple 8 : Si $H = \mathbb{R}^2$, pour le produit scalaire usuel, on a $(-1, 1) \perp (1, 1)$.

Remarque 9 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition 10 : L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :

$A^\perp = \{ y \in H,\ y \perp x,\ \forall x \in A \}$

Proposition 11 : Soit $A \subseteq H$, $A^\perp$ est la plus grande partie orthogonale à A. De plus $A^\perp$ est un sev fermé de H.

B Espaces de Hilbert et théorème de projection. Li 2.2

Définition 12 : On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme induite.

Exemple 13 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert.

Développement (Théorème de projection) Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H. Alors :

$\forall x \in H$, $\exists!\, y \in C$, $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C)$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. Il est caractérisé par :

$y \in C$ et $\mathrm{Re}\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$.

Corollaire 14 : Dans ce cas l'application $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne, c'est à dire $\forall x_1, x_2 \in H$: $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$.

Théorème 15 : Si F sev fermé de H Hilbert, alors $P_F : H \to F$ est une application linéaire continue, et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

De plus $H = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 16 : Soit H un espace de Hilbert et F sev de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Application 17 : L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

C Conséquences sur le dual et l'existence d'un adjoint Li 2.2

Définition 18 : Le dual de H est $H^* = \{ \phi : H \to \mathbb{K},\ \phi \text{ linéaire continue} \}$

Théorème 19 (de représentation de Riesz) Soit H un Hilbert. Pour tout $\phi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\phi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$.

Corollaire 20 : Soit H Hilbert, pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe $! T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall x, y \in H \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

Définition 21 : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, on dit que T est auto adjoint si $T^* = T$.

Exemple 22 : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur auto adjoint de $L^2(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow \int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ (Fubini)

Scanné avec CamScanner

II Bases hilbertiennes

A Famille orthonormale   Li 2.3

Définition 23 : Soit $(u_i)_{i\in I} \in H^I$. On dit que (u_i) est une famille orthonormée si :
i) $\|u_i\| = 1 \quad \forall i \in I$ ii) $u_i \perp u_j \quad \forall i \neq j$.

Exemple 24 : Dans $L^2([0,1])$ on pose $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$. Le système (e_n) est orthonormé.

Proposition 25. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ orthonormée, alors pour tous $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$:
$$\left\|\sum_{k=1}^m a_k u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^m |a_k|^2$$

Proposition 26 : (Inégalité de Bessel) Soit $(H, \langle,\rangle)$ préhilbertien. Pour toute famille orthonormée $(u_i) \in H^I$, on a, pour tout $x \in H$: $\sum_{i\in I} |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Proposition 27 : Soit H préhilbertien et $(u_i) \in H^I$ orthonormée. Si $x \in H$ tel que $x = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m u_m$ alors $\lambda_m = \langle x, u_m\rangle$ pour tout m.

Application 28 : Soit (u_m) une suite orthonormée et $x = \sum \lambda_m u_m$. Soit F_m le sev engendré par $u_1, \dots, u_m$. Alors $p_{F_m}(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k$

B Bases hilbertiennes   Li 2.3

Définition 29 : Soit $(H, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien, $(u_m) \in H^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_m) est une base orthonormée de H si $\{u_n, n \geq 1\}$ est total dans H. On dit aussi que (u_m) est une base hilbertienne.

Remarque 30 : Une base hilbertienne n'est en général pas une base algébrique.

Théorème 31. Soit H préhilbertien et (u_m) une base orthonormée de H. Alors tout élément $x \in H$ s'écrit : $x = \sum_{m=1} \lambda_m u_m$ avec $\lambda_m = \langle x, u_m\rangle$.

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les formules de Parseval :
i) $\|x\|^2 = \sum_{m=1} |\langle x, u_m\rangle|^2$;
ii) $\langle x, y\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, u_m\rangle \overline{\langle y, u_m\rangle}$, la série convergeant absolument.

Définition 32 : Un espace topologique E est dit séparable s'il existe $D \subseteq E$ qui est dénombrable et dense dans E.

Corollaire 33 : Soit H Hilbert séparable et soit (u_m) une base orthonormée de H. Alors l'application linéaire : $S : H \to \ell_2$, $x \mapsto (\langle x, u_m\rangle)_m$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert (conserve le produit scalaire).

Théorème 34 : Tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes.
La utiliser Gramm Schmidt

III Etude de l'espace L^2

A Avec les polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$ BHP 3.5.1

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 35 : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$.

Proposition 36 : $(L^2(I,\rho), \langle\cdot,\cdot\rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 37 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tel que $\deg P_n = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ → utiliser Gram Schmidt.

Exemple 38 : i) Si $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, on appelle polynôme de Hermite :
$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = X^2 - \frac{1}{2}, \dots,\ P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$
ii) Si $I = [-1,1]$ et $\rho(x) = 1$, on appelle polynôme de Legendre :
$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = X^2 - \frac{1}{3}, \dots,\ P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit ρ une fonction poids sur I. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $\|\ \|_\rho$

Remarque 39 : L'hypothèse sur ρ est cruciale. Pour $I = \mathbb{R}^*_+$, $w(x) = x^{-\ln x}$ la famille des polynômes orthogonaux associée à w ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

B Avec les séries de Fourier dans $L^2_{2\pi}$ QZ 4.1 4.2

Définition 40 : Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $e_n := e^{inx} \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et, pour $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$
$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$

Définition 41 : Pour $N \in \mathbb{N}$ on note $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$ le noyau de Dirichlet

$K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} D_n$ le noyau de Fejer et $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Théorème 42 (Fejér) : i) Soit $f \in C$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall N \geq 1$ et $\lim \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$
ii) Soit $f \in L^p$, $p \in [1, \infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ $\forall N \geq 1$ et $\lim \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Corollaire 43 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Références :

- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li
- Beck Malick Peyré Objectif agrégation BMP
- Queffélec Zuily Eléments d'analyse QZ.