

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières Exemples et applications

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

I Approximation par des fonctions polynomiales

A Approximation locale et formules de Taylor $X: G \rightarrow \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ suite de Lagrange

Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur $[a, b]$, tel que $f^{(m+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)$$

Corollaire 2 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{m+1} sur $[a, b]$, $m \geq 1$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in]a, b[, \|f^{(m+1)}(t)\| \leq M$. Alors :

$$\|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a)\| \leq M \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Théorème 3 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f: [a, b] \rightarrow E$ de classe C^{m+1} sur $[a, b]$ ($E, \mathbb{R}$ espace de Banach). Alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt$$

Théorème 4 (Formule de Taylor Young) Soit $f: I \rightarrow E$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, de classe C^m sur I . Soit $a \in I$ tel que $f^{(m+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \rightarrow 0$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + o(h^{m+1})$$

Exemple 5 : Par la formule de Taylor on a pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{et} \quad x - \frac{x^2}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120}$$

B Densité dans l'espace des fonctions continues L_2 2.4.1 $X: G \rightarrow \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$

Définition 6 : Soit A une sous-algèbre de Banach de $C(K, \mathbb{R})$, K compact. On dit que A est dense dans $C(K, \mathbb{R})$ si $\forall x \neq y \in K, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$.

Théorème 7 (Stone-Weierstrass admiss) Soit K compact, A une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle $C(K, \mathbb{R})$ tq A sépare les points de K et A contient les constantes. Alors A est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Remarque 8 : Puisque A est une sous-algèbre, A contient les constantes $\Leftrightarrow 1 \in A$.

Corollaire 9 : Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ compact, alors l'ensemble de tous les polynômes réels à d variables, restreints à K , est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Remarque 10 : Pour $d=1$ on retrouve le théorème de Weierstrass qu'on peut retrouver par la consolidation.

Développement (Théorème de Weierstrass) Toute fonction continue $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Application 11 : Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^1 |f(t)|^m dt = 0$. Alors $f = 0$.

C Densité dans $L^2(I, \rho)$ et polynômes orthogonaux BHP 3.1.5

On considère $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Définition 12 : On appelle fonction poids une fonction $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable strictement positive et telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \int_{-1}^1 (1+x)^m p(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue ie mesure du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} p(x) dx$$

Proposition 13 : $(L^2(I, \rho), \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 14 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux l'un à l'autre tels que $\deg P_n = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ .

Remarque 15 : Cette famille s'obtient en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 16 : i) Si $I = \mathbb{R}, \rho = e^{-x^2}$, on appelle polynômes de Hermite :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - \frac{1}{2}, \dots, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

ii) Si $I = [-1, 1], \rho = 1$, on appelle polynôme de Legendre :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - \frac{1}{3}, \dots, P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

Développement Soit $I \in \mathbb{R}$ intervalle, $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction p.s. Si il existe $\lambda > 0$ tel que $\int_I e^{\lambda |x|} p(x) dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à p forme une base hilbertienne de $L^2(I, p)$ pour $\|\cdot\|_p$.

Remarque 17: L'hypothèse sur p est cruciale. Si $I = \mathbb{R}^+$, $p(x) = x^{-2n-2}$, la famille des polynômes orthogonaux pour p ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(I, p)$.

Exemple 18: Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(I, p)$.

II Approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques

A Polynômes trigonométriques et coefficients de Fourier. QZ 4.1 X. G 4.5

Définition 19 On note $L^p_{2\pi} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ périodique, mesurable pour } p \in [1, +\infty]\}$ où $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ si $1 \leq p < +\infty$, $\|f\|_\infty = \text{borne sup. inférieure de } f$.

Le même coefficient de Fourier de f est $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

Proposition 20: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $g \in L^\infty$. Alors:

- i) $c_n(fg) = c_n(f) c_m(g)$ v) $f * e_n = c_n(f) e_n$
- ii) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ vi) $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
- iii) $c_n(e_n f) = e^{ina} c_n(f)$ vii) si $f, g \in C_{2\pi} \cap C^\infty_m$ alors $c_n(fg) = c_n(f) c_m(g)$
- iv) $c_n(e_n f) = c_{n-k}(f)$ viii) Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, $f \in C_{2\pi}$ et $x_m = c_m(g)$ v.m.

Lemme 21 (Riemann - Lebesgue) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors: $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0$.

Exemple 22: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors $a_n = \frac{6}{\pi^3}$, $a_m = \frac{6(-1)^{m+1}}{\pi^3}$, $b_n = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

B Introduction du noyau pour approcher les fonctions QZ 4.2

Définition 23: Le noyau de Dirichlet d'ordre $N > 0$ est $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$.

Proposition 24:

- i) D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ iii) $\forall f \in L^1_{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$
- ii) $D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right] / \sin \left(\frac{x}{2} \right)$ où $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$.

Définition 25: On appelle noyau de Fejér d'ordre $N \geq 1$, $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$.

Remarque 26: (K_N) est la suite des moyennes de Cesàro de (D_N) .

Proposition 27: i) $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$, $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \geq 0$.

ii) $\|K_N\|_1 = 1$
iii) $0 < S \leq \pi \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_S^{\pi} K_N(x) dx = 0$.

iv) $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n \quad \forall f \in L^1_{2\pi}, \forall N \geq 1$ (cf par définition $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N S_k(f) =$ somme de Fejér d'ordre N à f).

C Résultats de convergence QZ 4.3

Théorème 28 (convergence de Fejér) Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

- i) Si $f \in C_{2\pi}$ alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$
- ii) Si $f \in L^1_{2\pi}$ alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Corollaire 29: i) $\forall f \in C_{2\pi}$, $(c_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite dans $C_{2\pi}$.

- ii) Si $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $S_N(f, x_0) \rightarrow l$ alors $l = f(x_0)$.
- iii) (e_n) est une base orthonormale de $L^2_{2\pi}$.
- iv) $\forall f \in C_{2\pi} \cap C^\infty_m$, $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e_n$.

Théorème 30 (Dirichlet) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f 2π -périodique, mesurable, intégrable sur $[0, 2\pi]$, $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t |f(x+t) - f(x)| dt = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t |f(x-t) - f(x)| dt = 0$ existent.

Il existe $S > 0$ tel que: $\int_0^S \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt < +\infty$ et $\int_0^S \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} dt < +\infty$.

Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f, x_0) = \frac{1}{2} (f^+(x_0) + f^-(x_0))$.

Remarque 31: Voir Borel et Steinitz pour un contre-exemple.

III Approximation par des fonctions régulières

A Approximation de Runge B.P 14.4

Remarque 32: Il n'existe pas d'unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 33: Une suite $(\alpha_n) \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si:

- i) $\forall n \geq 1, \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(x) dx = 1$ ii) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{x: |x| \geq \varepsilon\}} |\alpha_n(x)| dx = 0$
- iii) $\sup_n \int_{\mathbb{R}} |\alpha_n(x)| dx < +\infty$

Exemple 34. Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha = 1$, alors $(\alpha_m : x \mapsto m \alpha(mx))$ est une approximation de l'unité.

Exemple 35: i) Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$, $\alpha_\lambda(x) := \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$ $\lambda > 0$.

ii) Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$, $\alpha_\lambda(x) := \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$ $\lambda > 0$.

Théorème 36 (convergence L^p) Soit (α_m) une suite d'approximations de l'unité.

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p$. Alors:

$\forall m \geq 1$, $f * \alpha_m \in L^p$ et $f * \alpha_m \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Théorème 37: Soit (α_m) approximation de l'unité et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f * \alpha_m$ est une C bornée par $\|f\|_\infty \|\alpha_m\|_1$.

B Régularisation par convolution. B.P. 14.5

Définition 3.8: Une suite (α_m) est dite régularisante si:

i) (α_m) est une approximation de l'unité.

ii) $\forall m \geq 1$, $\alpha_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$.

Exemple 39. Soit $\alpha_m(x) := m^{-d} \alpha(mx)$ où $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $\int_{\mathbb{R}} \alpha = 1$.

Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on pose $\alpha := \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}} \varphi}$ et (α_m) est régularisante.

Théorème 40: i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est dense dans $C_k(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ pour $\|\cdot\|_{k,p}$.

ii) $\forall p \in [1, +\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est dense dans L^p (pour $\|\cdot\|_p$).

Références :

- Xavier Gourdon Analyse X.G
- Cours d'analyse fonctionnelle Li
- Beck Malik Papy Objectif Agrégation BMP
- Queffelec Zully Eléments d'analyse QZ
- Briane Pajon Théorie de l'intégration BP