

205 : Espace vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K -ev, $m \in \mathbb{N}^*$.

I Normes et applications continues

A Notion de norme et de norme équivalente Li 1.1 + 1.2

Définition 1 : Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- i) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (définie positive)
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in K$ (homogénéité)
- iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Exemple 2 : Pour $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ est une norme, tout comme $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$.

Remarque 3 : À partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$, ce qui permet de définir une topologie sur E .

Définition 4 : On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ (deux normes) sont équivalentes s'il existe deux constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que : $K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1$, $\forall x \in E$.

Exemple 5 : Soit $x \in K^m$ et $p \in [1, +\infty]$, alors $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty$.

Théorème 6 : Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre elles.

B Applications linéaires continues Li 1.1 + exo

Soit E, F deux ev et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 7 : T est continue si $\exists K > 0$ telle que : $\|T(x)\|_F \leq K \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Exemple 8 : $S_0 : C([0, 1]) \rightarrow K$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Corollaire 9 : $\|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F$ est la plus petite constante $K \geq 0$ de la proposition 7.

De plus on a $\|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F$

→ est continue, bornée

Exemple 10 : Dans $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $T : f \in C_b(\mathbb{R}) \mapsto 3f - 2f \circ (\text{id} + 1)$ est continue linéaire de norme $\|T\| = 5$.

Proposition 11 : L'application $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ appelée norme opérateur.

C Différences entre dimensions finie et infinie Li 1.2 X.G 1.5

Mettre 1.2m 6 ici

Lemme 12 (Riesz) : Soit F un K -ev fermé d'un espace normé E , $F \neq E$. Alors $\forall \delta \in]0, 1[, \exists x \in E$, $\|x\| = 1$ et $\text{dist}(x, F) \geq 1 - \delta$.

Développement (Théorème de Riesz) Si E un espace normé possède une boule compacte $B(x_0, r)$, de rayon $r > 0$, alors $\dim E < +\infty$.

Corollaire 13 : Si E est de dimension infinie, alors tout compact de E est d'intérieur vide.

Corollaire 14 : Si E est un ev de dimension finie alors :

- i) $\forall T \in \mathcal{L}(E, F)$, T est continue (si F evm quelconque)
- ii) E est complet
- iii) Tout evm de dimension finie de E est fermé.
- iv) Les parties compactes de E sont les fermés bornés.

Remarque 15 : Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie. Par exemple :

- i) On considère $\ell^\infty(X)$ de $\|x\| = \sup |x_i|$. L'application linéaire $g : \ell^\infty(X) \rightarrow \ell^\infty(X)$, $p \mapsto p'$ n'est pas continue ($g(x^m) = m$ et $\|x^m\| = 1$)
- ii) Tout evm à base dénombrable n'est pas complet. Par exemple $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_1)$, considère $x_{m+1} = \frac{1}{2^m} + \frac{x_m}{2}$
- iii) La boule unité d'un evm de dimension infinie n'est pas compacte (théorème de Riesz).

II Cas particuliers des espaces vectoriels normés complets

A Les espaces de Banach Li 1.1

Définition 16 : On dit qu'un evm est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Exemple 17 : $\ell_p^m = (K^m, \|\cdot\|_p)$ est complet pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 18 (Riesz-Fischer) Pour tout espace mesuré $(S, \mathcal{T}, m)$, $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.

Proposition 19: Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ aussi.

Définition 20: $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et est appelé dual de E . C'est un espace de Banach.

B Conséquences du Théorème de Baire Li 4.1 4.2 4.3 + exos

Soit E, F , deux espaces de Banach.

Théorème 21: Soit $(F_n) \in E^N$ formés $f_n : F_n \rightarrow F$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$.

Théorème 22 (Baire): L'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles denses est encore dense dans E .

Application 23: Un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Théorème 24 (Banach-Steinhaus) Soit $T_i : E \rightarrow F$ linéaires continus tels que $\forall x \in E, C_x = \sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i x\|_F < +\infty$. Alors $C := \sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty$.

Corollaire 25: Soit $(T_n) \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$ tq $\forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$ existe. Alors:
i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} < +\infty$ ii) $T : E \rightarrow F$ est linéaire et continu.
De plus: $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Application 26: Il existe $g \in L^1([0, 1], \mathbb{C})$ qui ne coïncide pas avec sa série de Fourier.

Théorème 27 (de l'application ouverte) Soit $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ surjective. Alors:
 $\exists c > 0, T[B_E(0, 1)] \supseteq B_F(0, c)$ i.e T est ouverte.

Corollaire 28 (thm d'isomorphismes de Banach) Soit $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ bijective. Alors T^{-1} est continue (et T est un isomorphisme).

Application 29: La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Théorème 30 (du graphe fermé) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $G_T = \{(x, Tx) \in E \times F, x \in E\}$ soit fermé dans $E \times F$. Alors T est continu.

Remarque 31: La complétude est importante dans le théorème. $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ n'est pas complet et $D : f \in C^1([0, 1]) \mapsto f' \in C^1([0, 1])$ admet un graphe fermé.

C Cas particuliers des espaces de Hilbert

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Développement (thm de projection) Soit C une partie convexe fermée non vide de H . Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C, \|x - y\| = d(x, C)$.
On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par:
 $y \in C$ et $\operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$.

Corollaire 32: $p_C : H \rightarrow C$ est $\frac{1}{2}$ -lipshitzienne.

Théorème 33: Si F est fermé de H alors $p_F : H \rightarrow F$ est linéaire continue et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.
De plus on a $E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 34: Si F est de H alors F est dense dans H si $F^\perp = \{0\}$.

Application 35: $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 36 (Riesz-Fischer): Pour tout $\phi \in H^*$, $\exists ! y \in H$ tel que $\phi(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$.

Corollaire 37: $\forall T \in \mathcal{L}(H), \exists ! T^* \in \mathcal{L}(H)$ appelé adjoint de T tel que:
 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H$. De plus $\|T^*\| = \|T\|$.

III Exemple d'utilisation des thm pour la transformation de Fourier Li 3 + exos
BNP 3.5.1

Définition 38: On appelle transformation de Fourier de g la fonction:

$$\mathcal{F}g = \hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ est l'application linéaire:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}), g \mapsto \mathcal{F}g = \hat{g}.$$

Exemple 39: Transformation de Fourier de la gaussienne. Si $g(x) = e^{-\pi x^2}$ alors $\hat{g} = g$.

Proposition 40: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Si de plus $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Corollaire 41: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue de norme 1 et $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.

Exemple 42: $\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\eta) = \begin{cases} 1 & \eta = 0 \\ e^{-\pi i \eta} \frac{\sin(\pi \eta)}{\pi \eta} & \eta \neq 0 \end{cases}$

Théorème 43 (d'immersion): Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta) e^{i\pi \eta x} d\eta$ p.p.

Corollaire 44: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est injective

Théorème 45 (Plancherel): La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge, de façon unique, en un isomorphisme de Hilbert de L^2 sur lui-même.

Corollaire 46: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta) e^{i\pi \eta x} d\eta$ p.p.

Exemple 47: $\mathcal{F}(\chi_{[-\lambda, \lambda]})(\eta) = \frac{\sin(2\pi \lambda \eta)}{\pi \eta}$ p.p. donc $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(2\pi \lambda x)}{\pi \lambda x}\right) = \frac{1}{2\lambda} \chi_{[-\lambda, \lambda]}$.

Théorème 48: Soient $I \subset \mathbb{R}$ intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|x|} p(x) dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associés à p forme une base hilbertienne de $L^2(I, p)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Faire: (on évite de parler du théorème de Baire)

II Espace de Banach

III Espace de Hilbert

A Définition

B Théorème de projection

C Polynômes orthogonaux

IV Un exemple d'application avec la transformée de Fourier

Références :

- Xavier Gourdon Analyse X G
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li
- Beek Malick Peyré Objectif agrégation BMP