

206: Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K -ev, $m \in \mathbb{N}^*$

I Propriétés des espaces normés en dimension finie.

A Utilisation des valeurs d'adhérence EL 1.2 1.4

Définition 1: On appelle valeur d'adhérence d'une suite numérique (u_n) tout élément de K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) limite d'une suite extraite convergente de (u_n) .

Proposition 2: Toute suite numérique convergente ne possède qu'une limite comme valeur d'adhérence.

Remarque 3: On utilise souvent la contraposée de la proposition précédente: une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Exemple 4: Les valeurs d'adhérence de $((-1)^n)$ sont -1 et 1 donc la suite $((-1)^n)$ diverge.

Remarque 5: Une suite possédant une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente. Considérons $(u_n) = (1 - (-1)^n)/n$.

Théorème 6 (Bolzano-Weierstraß): Dans $\mathbb{R}$, toute suite bornée admet au moins une sous-suite convergente.

B Notion de norme et normes équivalentes Li 1.1.1 1.1.5

Définition 7: Une norme sur E est une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que:

- i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (définition positive)
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in K$ (homogénéité)
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire)

Remarque 8: A partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$, ce qui permet de définir une topologie sur E .

Exemple 9: i) Si on pose pour $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_m|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$$

alors $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur K^m .

ii) Si $p \in]1, +\infty[$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^m$ en posant $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p\right)^{1/p}$

Rem: pour le 2^e utilise l'inégalité de Minkowski.

Définition 10: On dit que deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que:

$$K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Exemple 11: i) Dans K^m , les normes $\| \cdot \|_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ sont équivalentes:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty.$$

ii) Dans $C([0, 1])$, les normes $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|_1$ ne sont pas équivalentes.

C Différences entre dimension finie et infinie Li 1.2 X.G 1.5

Développement Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre-elles.

Corollaire 12: Si E est un evm de dimension finie:

- i) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est continue (F evm quelconque).
- ii) E est complet.
- iii) Tout rev de dimension finie de E est fermé.
- iv) Les parties compactes de E sont les fermés bornés.

Remarque 13: Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie. Par exemple:

- i) On munit $\mathbb{R}[X]$ de $\| \cdot \|_1$ de $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$. L'application linéaire $f: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto P'$ n'est pas continue ($f(x^n) = nx^{n-1}$ et $\|x^n\| = 1$).
- ii) $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (considérons $(x_n) = (\frac{1}{n} + \frac{x_n}{n})$).
- iii) La boule unité fermée d'un evm de dimension infinie n'est pas compacte (Heine-Borel).

Lemme 14 (Riesz) Soit $F \subset E$ rev de E espace normé. Soit $\delta \in]0, +\infty[$ alors il existe $x \in F$ tel que: $\|x\| = 1$ et $d(x, F) \geq 1 - \delta$

Théorème 15 (Riesz) Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x, r)$ de rayon $r > 0$, alors il est de dimension finie.

Corollaire 16: Si E est un espace normé de dimension infinie, alors tout compact de E est d'intérieur vide.

II Théorie des équations différentielles linéaires

A Existence et unicité des solutions Ber 1.2 3.2

Définition 17: On dit que l'équation $y' = f(t, y)$ est une équation différentielle linéaire si $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où A et B sont des fonctions du temps à valeurs respectives dans $M_n(K)$ et K^n . Les autres formes d'équations sont qualifiées de non linéaires.

Définition 18: Dans le cas d'une équation différentielle linéaire $y' = A(t)y + B(t)$, si $B = 0$, on parle d'équation différentielle linéaire homogène.

Définition 19: Soit $\mathcal{X} = I \times X$ où $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle et $X \subseteq K^n$. On dit que $f: \mathcal{X} \rightarrow K^n$ est globalement lipschitzienne en y par rapport à t si pour tout segment $J \subset I$, il existe $L > 0$ tel que pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in J \times X$:

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Développement: Soit $(t_0, y_0) \in \mathcal{X}$, $(\alpha, \beta) \in [0, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$. On pose $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, $\tilde{B} = \overline{B}(y_0, \alpha, \beta) = K^n$ (continue et globalement lipschitzienne en y par rapport à t). On définit pour $y \in \tilde{E} = C(I, \tilde{B}(y_0, \alpha, \beta))$:

$$\phi(y) : t \in I \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

On suppose que pour tout $y \in \tilde{E}$, $\phi(y) \in \tilde{E}$. Alors il existe une unique solution globale $y: I \rightarrow K^n$ de $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

Théorème 20 (Cauchy-Lipschitz global) Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle et $f: I \times K^n \rightarrow K^n$ continue et globalement lipschitzienne en y par rapport à t . Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^n$. Alors il existe une unique solution globale $y: I \rightarrow K^n$ de $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 21 (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $A \in C(I, M_n(K))$ et $B \in C(I, K^n)$, $(t_0, y_0) \in I \times K^n$. Alors il existe une unique solution $y: I \rightarrow K^n$ de $y' = A(t)y + B(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

B Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène Ber 2.3

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $A \in C(I, M_n(K))$, $B \in C(I, K^n)$. On note S l'ensemble des solutions maximales de $y' = A(t)y + B(t)$, $(t, y) \in I \times K^n$ ($\mathcal{L}$) et S_H l'ensemble des solutions maximales de $y' = A(t)y$, $(t, y) \in I \times K^n$ ($\mathcal{L}_H$).

Les éléments de S et S_H sont définissables I d'après le corollaire 21 et il s'agit donc de solutions globales.

Proposition 22: i) l'ensemble S_H est un K -espace de dimension n .

ii) $\forall t_0 \in I$, $\Phi_{t_0}: S_H \rightarrow K^n$, $y \mapsto y(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 iii) S_H est de dimension n .

Corollaire 23: L'ensemble S est un K -espace affine de direction S_H .

Remarque 24: On pourra noter "solution générale" = solution homogène + solution particulière.

Exemple 25: Les solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $y(t) = a e^t + b t e^t$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 26: Si $m = 1$, la solution maximale (globale) de $y' = a(t)y + b(t)$ avec $y_0 = y(t_0)$, $(y_0, t_0) \in I \times K$ est :

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\sigma) d\sigma\right) ds.$$

Exemple 27: Les solutions de $y' = 2y + 1$ sont de la forme $y(t) = C_0 e^{2t} - \frac{1}{2}$, $C_0 \in K$.

C Matrice fondamentale et Wronskien Ber 2.4

Définition 28: Un système fondamental de solutions de $(\mathcal{L}_H)$ est une famille $(y_1, \dots, y_n)$ de solutions indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. La matrice $\Phi(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, constituée de ces solutions considérées comme des vecteurs colonnes et appelée matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_H)$. On appelle wronskien de ce système fondamental $\det(\Phi(t))$.

Proposition 29: Soient $y_1, \dots, y_m$ solutions indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. Si y solution de $(\mathcal{L}_H)$ alors il existe $C_1, \dots, C_m \in K$ telles que :

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_m y_m = \Phi(t) C, \quad C \in K^m.$$

Corollaire 30: Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale de $(\mathcal{L}_H)$. La solution de $(\mathcal{L}_H)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1} y_0$, $t \in I$.

Exemple 31: Une matrice fondamentale pour $y'' - 2y' + y = 0$ est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}$ et le wronskien est $\det(\Phi(t)) = e^{2t}$. Si de plus $y(0) = -1$ et $y'(0) = 2$ alors l'unique solution est donnée par $y(t) = (-1+t) e^t$.

III Approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques

A Polynômes trigonométriques à coefficients de Fourier QZ 4.1 X.G.4.5

Définition 32: On note $L^1_{2\pi} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2\pi \text{ périodique, mesurable pour } \mu \in [0, 2\pi]\}$ avec $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$. $\tilde{f} \in C([0, 2\pi])$ et $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(t)| dt$ = borne supérieure de $|f|$.
Le n -ième coefficient de Fourier est $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ et on définit pour $m \in \mathbb{N}$, $e_n: t \mapsto e^{int}$.
Une somme finie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est un polynôme trigonométrique.

Proposition 33: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, $\lambda, m \in \mathbb{Z}$, $g \in L^1_{2\pi}$. Alors :

- $c_m(fg) = c_m(f)c_m(g)$ v) $f * e_m = c_m(f) e_m$
- $c_m(\tilde{f}) = \overline{c_{-m}(f)}$ vi) $\|f * e_m\|_\infty \leq \|f\|_1 \|e_m\|_\infty$
- $c_m(T_\lambda f) = e^{im\lambda} c_m(f)$ vii) si $f, g \in C_0 = \cap C_m$, $c_m(fg) = (c_m(f))' c_m(g)$
- $c_m(e_\lambda f) = c_m(f)$ viii) si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \rightarrow f$ alors $f \in C_0$ et $c_m = c_m(f)$

Lemme 34 (Riemann-Lebesgue) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f \in L^1([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

Exemple 35: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π périodique égale à $\frac{1}{\pi} \chi_{[-\pi, \pi]}$, alors $c_n = \frac{1}{2}$ et $\forall m \neq 0, a_m = (-1)^m \frac{1}{m^2}$, $b_m = 0$.

B Introduction de moyennes pour approximer les fonctions QZ 4.2

Définition 36: Les moyennes de Dirichlet d'ordre $N \geq 0$ est $D_N = \sum_{n=-N}^N e^{int}$.

Proposition 37:

- D_N est paire et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$ iii) $\forall f \in L^1_{2\pi}, \forall N \geq 0, S_N(f) = f * D_N$
- $D_N(z) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})z)}{\sin(\frac{z}{2})}$ si $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{int}$

Définition 38: Le noyau de Fejér d'ordre $N \geq 1$ est $K_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} D_m$

Remarque 39: (K_N) est la suite des moyennes de Cesàro de (D_N) .

Proposition 40: i) $K_N = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N}) e^{int} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \right)$ ii) $\|K_N\|_1 = 1$.

iii) $0 < \delta < \pi \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x) dx = 0$

iv) $S_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^N (1 - \frac{|n|}{N}) c_n(f) e^{int}$, $\forall f \in L^1_{2\pi}, \forall N \geq 1$ (à prouver)
 $S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N S_n(f)$ somme de Fejér d'indice N de f .

C Résultats de convergence QZ 4.3

Théorème 40 (Convergence de Fejér) Soit $N \in \mathbb{N}^*$:

- Si $f \in C_{2\pi}$, alors $\|S_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_\infty = 0$
- Si $f \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$), alors $\|S_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$

Corollaire 41: i) $\forall (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on a dans $C_{2\pi}$:

- $\forall f \in C_{2\pi} \cap C_{pm}^*$, $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}$
- Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes algébriques (théorème de Weierstrass)

Théorème 42 (Dirichlet) : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π périodique, mesurable, intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f^+$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f^-$ existent.

$$\exists \delta > 0, \int_0^\delta |f(x+1) - f^+| dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\delta}^0 |f(x+1) - f^-| dx < \infty$$

$$\text{Alors } \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f, x_0) = \frac{f^+ + f^-}{2}$$

D Cas des fonctions de carré intégrable ELA 6.4 QZ 4.1.1 X.G.4.5

Proposition 43: L^2 est un espace de Hilbert pour $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Proposition 44: $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de L^2 .

Théorème 45 (Inégalité de Bessel) : Soit $f \in CH_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a :
 $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$.

Théorème 46 (Formule de Parseval) Pour toute fonction f , 2π périodique et continue par morceaux sur $(0, 2\pi)$ on a : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

$$\text{Application 47: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Références :

- Xavier Gourdon Analyse X.G
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li
- El Amrani Suites et séries numériques El A
- Berthelin Équations différentielles Ber
- Queffelec Zuily Éléments d'analyse QZ.