

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

I Complétude dans un espace métrique

A Définition par les suites de Cauchy NEH 2.6

On considère (X, d) espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$

Définition 1: (x_n) est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \geq n, d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Proposition 2: i) Toute suite convergente dans X est de Cauchy.

ii) Toute suite de Cauchy dans X est bornée

iii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Proposition 3: Une suite de Cauchy dans (X, d) possède une valeur d'adhérence et converge.

Définition 4: On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

Exemple 5: $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont complets mais pas $\mathbb{Q}$.

Par exemple $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!})$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais converge vers $e \notin \mathbb{Q}$.

B Premières propriétés NEH 2.6

On considère $A \subset X$.

Proposition 6: i) Si A est complet alors A est fermé dans X .

ii) Si A est dense dans X et $A \neq X$, alors A n'est pas complet.

iii) Si (X, d) est complet et si A est fermé dans X alors A est complet.

Proposition 7: Soient (X_i, d_i) , $1 \leq i \leq p$ espaces métriques. Alors: $X_1 \times \dots \times X_p$ est complet si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ (X_i, d_i) est complet.

Théorème 8 (Cantor): (X, d) est complet si et seulement si l'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de parties fermées non vides de (X, d) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$ contient un seul point.

II Exemples d'espaces vectoriels normés complets

A Espaces de Banach. XG 1.5

On considère E et F deux espaces vectoriels normés

Définition 9: On dit que E est de Banach si E est complet.

Exemple 10: i) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ et $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Banach.

ii) Pour X compact et $C(X)$ le $\mathbb{K}$ des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ on a que $(C(X), \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace de Banach.

Théorème 11: Si F est un Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Corollaire 12: $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Application 13: Soient E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $\text{id} - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}(E)$.

B Cas particulier des espaces L^p . BP 9.1 9.2 9.3

Soit (E, d, μ) un espace mesuré.

Définition 14: Pour tout $p > 0$ réel on définit

$$\mathcal{L}^p(E, d, \mu) = \{ f: E \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable}, \|f\|_p = (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty \}$$

Théorème 15: (Inégalité de Hölder) Soient $f, g: E \rightarrow \mathbb{K}$ mesurables et $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Corollaire 16 (Inégalité de Minkowski) Soient $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Définition 17: On pose $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) / \{ \| \cdot \|_p = 0 \}$, $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \| \cdot \|_p)$ est un R.v.n.

Théorème 18 (Riesz-Fischer) L'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \| \cdot \|_p)$ est de Banach.

Corollaire 19: Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$ et $g \in \mathcal{L}^p$ tel que $f_n \xrightarrow{L^p} g$ alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) et $g \in \mathcal{L}^p$ telle que $|f_{n_k}| \leq g$ p.p. et $f_{n_k} \rightarrow g$ p.p.

C Espaces de Hilbert NEH 8.2 8.3 8.4

Définition 20: i) Un espace préhilbertien est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un K -ev et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

ii) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 21: Sur K^n , tout produit scalaire définit une structure d'espace de Hilbert.

Développement (Théorème de projection sur un convexe fermé)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et A une partie non vide convexe de E . On suppose que $(A, \|\cdot\|)$ est complet. Alors :
 $\forall x \in E, \exists ! a \in A, \|x - a\| = d(x, A)$. Ce point est appelé la projection de x sur A et noté $p_A(x)$.

Corollaire 22: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert, $F \subseteq H$ sous-espace fermé. Alors
 $H = F \oplus F^\perp$ et $\forall x \in H, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$

Corollaire 23: Soit F s.v. de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert. Alors :

- On a $\overline{F^\perp} = F^\perp$, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$ et $H = \overline{F} \oplus F^\perp$
- F est fermé dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Théorème 24 (de représentation de Riesz) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert et H^* le dual topologique de H . Alors pour tout $\varphi \in H^*$, $\exists ! y_\varphi \in H, \forall x \in H$
 $\varphi(x) = \langle x, y_\varphi \rangle$.

III Utilisation de la complétude

A Prolongement d'applications NEH 2.6 Irem

Théorème 25: Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques, A une partie dense dans X et $g: A \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Si (Y, d') est complet, g se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{g}: X \rightarrow Y$. De plus, $\tilde{g}$ est uniformément continue.

Contre-exemple 26: Soient $X = [0, 1]$, $A = [0, 1[$ et considérons $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Alors A est dense dans X , il est un espace métrique complet et g est une application continue mais ne se prolonge pas

par continuité sur X . L'hypothèse d'uniforme continuité est donc essentielle.

Définition 27: L'espace de Schwartz :

$$S(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |x|^M |f^{(k)}(x)| \} < +\infty \}$$

Théorème 28: L'application $\mathcal{F}: f \mapsto [\hat{f}]$ où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$ est la transformée de Fourier est bijective.

Théorème 29: Soit $g \in S(\mathbb{R})$, alors $\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(g)\|_2^2$.

Proposition 30: Soit $g \in C(E, F)$ avec E, F deux $\mathbb{R}$ -ev. Alors g est continue si g est uniformément continue.

Théorème 31 (Fourier Plancherel) La transformation de Fourier se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

B Théorème de point fixe NEH 2.6 Ber 3.2

Définition 32: Soient X un ensemble, $x \in X$ et $g: X \rightarrow X$ une application. On dit que x est un point fixe de g si $g(x) = x$.

Théorème 33 (du point fixe) Soient (X, d) un espace métrique complet et $g: X \rightarrow X$ une application contractante de rapport k . Alors :

- g possède un unique point fixe $z \in X$.
- Pour tout $x \in X$ on a :
 $z = \lim g^n(x)$ et $d(z, g^m(x)) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x, g(x)) \quad \forall m \geq 0$.

Remarque 34: i) Si $k \geq 1$ alors le résultat devient faux. En effet pour $X = \mathbb{N}$ muni de la distance euclidienne, X est complet. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $g(m) = k m + 1$, $d(g(m), g(n)) = k d(m, n)$ mais g n'admet pas de point fixe.

ii) Le résultat est faux si (X, d) n'est pas complet. Par exemple $X =]0, 1[$ muni de la distance euclidienne n'est pas complet et si $g: X \rightarrow X, x \mapsto \frac{x}{2}$ alors g est contractante et $\text{Fix}(g) = \emptyset$.

iii) Si (X, d) est un espace métrique et $g: X \rightarrow X$ est contractante alors $\forall x, y \in X$ tels que $x \neq y$ on a $d(g(x), g(y)) < d(x, y)$. La réciproque est fautive (considérons $X =]0, +\infty[$ complet et $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$).

Corollaire 35: Soit (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application telle que $\exists p \in \mathbb{N}^*$, f^p est contractante. Alors:
 i) f possède un unique point fixe $z \in X$.
 ii) $\forall x \in X$ on a $z = \lim f^n(x)$.

Remarque 36: f n'est pas forcément continue. Par exemple si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$, 0 sinon alors f est discontinue, $f \circ f = 0$ donc f^2 est contractante et l'unique point fixe de f est 0.

Lemme 37: Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^N$, $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ et $\beta \neq 0$ et $\alpha_0 \in]0, +\infty[$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$. Soit $g: I \times \bar{B}(y_0, \alpha_0) \rightarrow \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, uniformément par rapport à la variable de temps. On définit, pour $y \in \tilde{E} := C(I, \bar{B}(y_0, \alpha_0))$ la fonction $\phi(y)$ sur I par $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds$. On suppose que $\phi(y) \in \tilde{E}$ pour tout $y \in \tilde{E}$. Alors il existe une unique solution globale $y: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ de $y' = g(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

Développement (Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien)
 Si g continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état alors il existe une unique solution globale de $\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Exemple 38: on est 1-lip donc $y' = \cos(y)$
 $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$
 admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Références :

- Topologie générale et espaces normés Nawfal El Hage Hamam NEH
- Théorie de l'intégration Briane Pagès BP
- Xavier Gourdon Analyse X.G
- Florent Berthelin Equations différentielles Ber
- Isenmann Isen