203 : Utilisation de la notion de compacité

On considère (E, d) un espace métrique, $m \in \mathbb{N}^*$.

I Caractérisation de la compacité

A Propriété de Borel Lesbesgue X.G 1.3.1 1.3.2

Définition 1 : On dit que E est compact si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert pour tout i, il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Exemple 2 : i) Tout espace métrique fini est compact
ii) $\mathbb{R}$ n'est pas compact

Proposition 3 : E est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide.

Corollaire 4 : Si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact de E, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

Remarque 5 : Ce résultat reste vrai si E est complet et que $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Si $\operatorname{diam}(F_n) \not\to 0$, le résultat est faux dans un complet (par exemple, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty[= \emptyset$)

Proposition 6 : Si E est compact, alors E est borné.

Définition 7 : Soit $A \subset E$, alors on dit que A est compact si A est compact pour la topologie induite, ie $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert de E alors il existe $J \subset I$ fini tel que $A \subset \bigcup_{i \in J} O_i$

Exemple 8 : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés

Proposition 9 : Une réunion finie de compacts est compacte. Une intersection quelconque de compacts est compacte. Utiliser déf 7.

Contre exemple 10 : $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ réunion infinie de compacts pas compacte.

B Propriété de Bolzano Weierstrass X.G 1.3.2 1.3.3 + exo

Définition 11 : On dit que E est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules (ouvertes) de rayon ε.

Lemme 12 : Si E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass (de toute suite de E on peut extraire une sous suite convergente) alors E est précompact.

Lemme 13 : Si E vérifie la propriété de Bolzano Weierstrass et $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert alors $(\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \exists i \in I), B(x, \alpha) \subset O_i$.

Théorème 14 (de Bolzano-Weierstrass) : E est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous suite convergente dans E.

Corollaire 15 : E est compact ssi toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence ssi toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation

Application 16 : Soit $(x_n) \in E$ compact admettant une unique valeur d'adhérence x. Alors (x_n) converge vers x.

Théorème 17 : E est compact ssi E est complet et précompact. (réciproque hors-bac)

II Fonctions continues sur un compact

A Compacité et extrema Rem 1.4

On considère E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$.

Théorème 18 : Si E est compact et f continue alors $f(E)$ est compact.

Corollaire 19 : Si E est compact et f continue alors f est fermé ie l'image de tout fermé est fermée.

Remarque 20 : Il existe des applications continues non fermé. Par exemple $\exp$ est continue mais $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermé.

Corollaire 21 : Si E compact et $f : E \to F$ continue bijective alors f^{-1} continue.

Corollaire 22 : Si E est compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue alors f bornée et atteint ses bornes.

Application 23 (Théorème de Rolle) : Soit $K \subset E$ compact, $f : E \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathring{K}$ et continue sur K et constante sur ∂K.
Alors il existe $c \in \mathring{K}$ tel que $df(c) = 0$

Scanné avec CamScanner

Exemple 24 : Le polynôme de Hermite H_n, définis par $(e^{-x^2})^{(n)} = H_n(x)\, e^{-x^2}$ admet n racines réelles distinctes.

B Uniforme continuité, Théorèmes de Heine et de Dini. X-G 4.3 (+exo) 2.3.4

Définition 25 : On dit que (f_n) converge simplement (resp uniformément) sur X vers $f : X \to E$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.
(resp $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.)
Déf unif cont pour f : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ $\forall x, y$ tq $d(x,y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

Remarque 26 : La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse. (considérer $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$).

Théorème 27 (Heine) Si E est compact et f continue alors f est uniformément continue.

Théorème 28 (Dini) Soit $(f_n) \in C([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors si (f_n) converge simplement vers f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Théorème 29 (Dini) Soit $(f_n) \in C([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes. Si (f_n) converge vers $f \in C(I, \mathbb{R})$ alors la convergence est uniforme.

C Utilisation pour les points fixes et les équations différentielles. Has 2.6 Ber 3.2

Définition 30 : On dit que f est contractante si f est k-lipschitzienne et que $k < 1$.

Théorème 31 (pt fixe) Soit $f : E \to E$ (E complet) k contractante. Alors on a :
i) f possède un unique point fixe $z \in E$
ii) $\forall x \in E$, $z = \lim f^n(x)$ et $d(z, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Remarque 32 : i) Si $k \geq 1$ le résultat est faux. Par exemple $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ complet, si $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(n) = k + n + 1$ alors $d(f(n), f(m)) = k\, d(n,m)$ mais $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.
ii) Si (X,d) n'est pas complet le résultat est faux. Par exemple $(]0,1], |\cdot|)$ n'est pas complet, pour $f : x \to X : x \mapsto \frac{x}{2}$, f est contractante et $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.
iii) Si (X,d) métrique et $f : X \to X$ contractante alors $\forall x, y \in X$ tels que $x \neq y$ on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. La réciproque est fausse : considérer $([0, +\infty[, |\cdot|)$ complet et $f(x) = \sqrt{x+1}$. pk ?

Corollaire 33 : Soit (X,d) métrique complet, $f : X \to X$ telle que f^p est contractante, $p \in \mathbb{N}^*$. Alors :
i) f possède un unique point fixe $Z \in X$.
ii) $\forall x \in X$, $Z = \lim f^{np}(x)$

Application 34 (Cauchy Lipschitz global) Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ continue, globalement lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^n$ de $y' = f(t,y)$ et $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 35 : (Cauchy Lipschitz linéaire) Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^n)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. Alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}^n$ telle que $y(t_0) = y_0$ de $y' = A(t)y + B(t)$.

III Compacité dans les espaces vectoriels de dimension infinie

A Théorème de Riesz. Li 2.2.2 X-G 2.5 + exo

Lemme 36 (de Riesz) Soit F sev fermé d'un evn E tel que $F \neq E$. Alors :
$\forall \delta \in]0,1[$, $\exists x \in E$ tel que $\begin{cases} \|x\| = 1 \\ \mathrm{dist}(x, F) \geq 1 - \delta \end{cases}$

Développement (Théorème de Riesz) Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0, r)$ de rayon $r > 0$, alors il est de dimension finie.

Corollaire 37 : $\dim(E) < \infty$ ssi $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

Corollaire 38 : Si $\dim E = \infty$ alors tout compact de E est d'intérieur vide.

Application 39 : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 40 : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn (quelconque) est continue.

Corollaire 41 : Tout evn de dimension finie est complet.

Corollaire 42 : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

Corollaire 43 : Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Scanné avec CamScanner

Remarque 44 : Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie. Par exemple :
- On munit l'ev $\mathbb{R}[X]$ de la même $\|\sum a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$. L'application linéaire $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ n'est pas continue (en effet, $f(X^n) = n$ et $\|X^n\| = 1$)
- Tout evn à base dénombrable n'est pas complet (par exemple $(\mathbb{Q}, |.|)$)
- La boule unité fermée d'un evn de dimension infinie n'est pas compacte. (Le théorème de Riesz)

B Théorème de Stone-Weierstrass Li 2.4 X.G 4.3 + exo

Définition 46 : Soit A une sous algèbre de $C(K, \mathbb{R})$ où K compact. On dit que A sépare les points de K si $\forall x \neq y \in K$, $\exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Théorème de Stone Weierstrass 47 (réel) : (Hors-sujet) Soit K un espace compact et A sous algèbre de $C_{\mathbb{R}}(K)$. Si A sépare les points de K et A contient les constantes alors $\overline{A} = C(K, \mathbb{R})$

Application 48 : Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$, alors l'ensemble $P(K, \mathbb{R})$ de tous les polynômes réels à d variables, restreint à K, est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Remarque 49. Le résultat précédent pour $d = 1$ peut-être démontré en utilisant la convolution.

Développement (Théorème de Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions de polynômes.

Corollaire 50 : L'espace réel $L^2([0,1], \mathbb{R})$ est séparable.

Scanné avec CamScanner

Références :

- Xavier Gourdon Analyse X.G
- Rombaldi Eléments d'analyse réelle Rom
- Berthelin Equations différentielles Ber
- Hassan Topologie générale et espaces normés Has
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li

Scanné avec CamScanner