

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Soit X, Y 2 espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$

I Espace des fonctions continues

A Continuité, unicité, continuité. Has 1.2 2.2 2.3

Définition 1. On dit que f est continue si pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \delta)$, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
On note $C(X, Y)$ l'ensemble.

Remarque 2. On peut caractériser la continuité entre deux espaces topologiques par $\forall x \in X, \forall W \in \mathcal{V}_x, f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$.

Exemple 3. Les applications constantes sont continues.

Proposition 4 (caractérisation séquentielle de la continuité). f est continue en $a \in X$ si $\forall (x_n) \in X^n$ convergant vers a , $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Définition 5. On dit que f est uniformément continue si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Remarque 6. La continuité uniforme implique la continuité. La réciproque est fautive (considérer $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$).

Exemple 7. Toute application lipschitzienne est uniformément continue. (par exemple les translations $x \mapsto x + a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

B Espaces normés des fonctions continues sur un compact. Has 3.2 3.6

Théorème 8 (Heine). Si X est compact et f continue, alors f est uniformément continue.

Théorème 9. L'image de tout compact par une fonction continue est compacte.

Corollaire 10. Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur X compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 11. $x \mapsto x^2$ est c sur $[0, 1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Proposition 11. Pour X compact et Y complet, $(C(X, Y), d_\infty)$ est un espace.

C Parties données Li 2.4 X.G 4.3 + ex

Définition 12. Soit A une sous-algèbre de $C_p(K)$. On dit que A sépare les points de K si $\forall x \neq y \in K, \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$. (K espace compact).

Théorème 13 (Stone-Weierstrass admet). Soit K compact, A sous-algèbre de B noyau de $C(K, \mathbb{R})$ qui sépare les points de K et qui contient des constantes. Alors A est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Application 14. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compact, alors l'ensemble des polynômes réels à d variables, restreints à K , est dense dans $C(K, \mathbb{R})$.

Remarque 15. Le résultat précédent est vrai pour $d = 1$ et peut être démontré en utilisant la convolution.

Développement. Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions de polynômes.

II Espaces de Lebesgue

A Espace L^p et limite des fonctions continues B.P 3.3 9.4

Soit $(X, \mu, \mathcal{F})$ un espace mesuré, $p \geq 1$.

Définition 16. On pose $L^p(\mu) = L^p(\mu) / \sim$ avec $L^p = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int |f|^p d\mu < +\infty\}$ et $f \sim g$ si $\|f - g\|_p = 0$.

Proposition 17. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 18 (Riesz-Fischer). $\forall p \in [1, +\infty[$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Lemme 19. Soit $C \subset D \subset L^p(\mu)$. Si C est dense dans D et D est fermé dans $L^p(\mu)$ alors C est dense dans $L^p(\mu)$.

Proposition 20. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, C l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(\mu)$.

Théorème 21. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ à mesure de Lebesgue, alors :

- l'ensemble des fonctions continues en réalité à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$;
- l'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$.

B Approximation de l'unité et suite régularisante BP 14.4 14.5

Définition 22: Une suite $(\alpha_n) \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

$$i) \forall m \geq 1, \int_{\mathbb{R}} \alpha_m dx = 1$$

$$ii) \sup_{m \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\alpha_m| dx < +\infty$$

$$iii) \forall \varepsilon > 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_m| dx = 0$$

Exemple 23: Soit $\alpha \in L^1$ tq $\int \alpha = 1$. Alors $(\alpha_m := m^d \alpha(mx))_m$ est une approximation de l'unité.

Théorème 24: Soit (α_m) une suite d'approximations de l'unité. Soient $f \in C_c$ et $\alpha \in C$, $g \in L^1$ alors :

$$\forall m \geq 1, g * \alpha_m \in L^1 \text{ et } g * \alpha_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g$$

Définition 25: Une suite (α_m) est dite régularisante si :

i) la suite (α_m) est une approximation de l'unité.

$$ii) \forall m \geq 1, \alpha_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}).$$

Exemple 26: Soit $\alpha_m(x) := m^d \alpha(mx)$, $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$, $\int \alpha = 1$. Pour $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on pose $\alpha := \frac{\phi}{\int \phi dx}$ et (α_m) est une suite régularisante.

Théorème 27: i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est dense dans $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (pour $\|\cdot\|_\infty$).

ii) $\forall f \in C_c, \forall \alpha \in C_c^\infty, \alpha_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ est dense dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (pour $\|\cdot\|_1$).

C Etude d'un cas particulier avec les polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$. BP 3.1.5

On considère $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalle.

Définition 28: On appelle fonction poids une fonction $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que $\forall m \in \mathbb{N}, \int |x|^m \rho(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_\rho < +\infty\}$ où $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$ mod. nul.

Proposition 29: $(L^2(I, \rho), \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 30: Il existe une unique famille (P_m) de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_m = m$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux (associée à ρ).

Exemple 31: Si $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$ on appelle polynômes de Hermite : $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2 - \frac{1}{2}, \dots, P_m(x) = \frac{(-1)^m}{2^m} e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2})$.

Si $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$ on appelle polynômes de Legendre :

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \dots, P_m(x) = \frac{m!}{(2m)!} \frac{d^m}{dx^m} ((x^2 - 1)^m)$$

Développement: Soit $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour $\|\cdot\|_\rho$.

Remarque 32: La condition sur ρ est cruciale. Par exemple $I = \mathbb{R}^+, \rho(x) = x^{-1/2}$ et les polynômes orthogonaux pour ρ ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

III Exemples d'espaces de fonctions. Li 10.5.2 E2A

A Espace de Schwartz Li 10.5.2 E2A 3.6

Définition 33: On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}$ l'espace :

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty\}$$

Exemple 34: $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$.

Définition 35: On définit la transformée de Fourier de $f \in S(\mathbb{R})$ par $\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$.

Proposition 36: i) $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et $f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

ii) $\mathcal{F}$ réalise une bijection de $S(\mathbb{R})$ sur lui-même.

iii) $\forall f, g \in S(\mathbb{R}), \widehat{fg} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ et $\widehat{\hat{f}} = f$.

iv) $\forall k, m \in \mathbb{N}$ on peut définir $f^{(k)}(y) = (2\pi i y)^m \hat{f}(y)$.

$$\text{et } \hat{f}^{(m)}(y) = \hat{f}_m(y) \text{ et } f_m(x) = (-2\pi i x)^m f(x)$$

Exemple 37: Si $f(x) = e^{-x^2}$ alors $\hat{f} = f$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 38 (d'inversion): Si $f \in S(\mathbb{R}), g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) e^{2\pi i x u} du$.

Application 39 - (Equation de Laplace) Soit $\phi \in S(\mathbb{R})$, l'équation $u'' - u = \phi$ d'inconnue $u \in S(\mathbb{R})$ admet une unique solution donnée par $u(x) = -\hat{\phi}(ix) \times \frac{1}{1 + |x|^2}$.

B. Espace des fonctions holomorphes Tau 6.2 6.3 6.4 6.5

Définition 40: Soient $[a, b], \gamma$ un chemin et f continue sur $\text{im } \gamma$. L'intégrale de f sur γ , notée $\int_{\gamma} f(z) dz$, est définie par :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Théorème 41: Soient $[a, b], \gamma$ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \text{im } \gamma$. Pour $z \in U$ on pose $\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{du}{u-z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$.

L'application $U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \text{ind}_{\gamma}(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U et nulle sur la composante connexe bornée de U . On dit que $\text{ind}_{\gamma}(z)$ est l'indice de z par rapport à γ .

Remarque 42: Intuitivement, $\text{ind}_{\gamma}(z)$ est le "nombre de tours" (avec un signe) décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a, b]$.

Théorème 43: (Théorème de Cauchy pour un connexe) Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe, $w \in U$, f continue sur U holomorphe dans $U \setminus \{w\}$. Alors f possède une primitive dans U et, pour tout chemin fermé γ dans U on a :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Corollaire 44 (Formule de Cauchy pour un connexe) Soit γ un chemin fermé dans $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe, $z \in U \setminus \text{im } \gamma$, et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors
$$f(z) \text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{u-z} du.$$

Théorème 45: Soient $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :

- i) On a $f \in \mathcal{C}^{\infty}(U)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$.
- ii) Si U est connexe et si γ est un chemin fermé dans U tel que $a \notin \text{im } \gamma$ on a
$$f^{(n)}(a) \text{ind}_{\gamma}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 46: $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

Références :

- El Haman Topologie générale et espaces normés Has
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li
- Briane Pagis Thèse de l'intégration BP
- Beck Malick Peyré Objectif Agrégation SMP
- El Amrani Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels ELA
- Tournel Analyse complexe pour la licence 3 Tou