267 - Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Inégalité isopérimétrique
[illegible] de la TP

I. Courbes et arcs paramétrés

On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

a) Paramétrer, un moment pour une courbe

Def 1 : Arc paramétré de $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ continu [illegible] de classe C^1 [Berger?] [SS]

- $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$ est la courbe
- Courbe fermée, simple.
- Courbe régulière

Ex 1 : Cercle : $\gamma : [r\cos t, r\sin t]$ ...
$[r\sin t, r\cos t]$ ...

Def 2 : Changement de paramétrage

Def 3 : Longueur d'arc.
Paramétrage par l'abscisse curviligne

Rq 4 : $\int_\gamma |(\gamma \circ \theta)'| \, dt = \int_\gamma |\gamma' \circ \theta| \cdot |\theta'| = \int |\gamma'|$ donc la longueur d'un arc ne dépend pas du paramétrage.

Ex 5 : Graphe [SS]
Hélice [Lafontaine]

Thm 6 : Toute courbe régulière C^1 peut être paramétrée par longueur d'arc. [SS] [Lelong-Ferrand Arnaudiès] [R-W]

→ Les paramétrages aident au tracé de courbes

Ex 7 : $\cos(3t)$, $\sin(t)$. **Dessin** [Rouvière Warusfel]

b) Courbures [Sigmundur Gudmundsson] [Rouvière-Warusfel]

I. Def : $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ C^2 régulière paramétrée par l'abscisse curviligne !

Def 9 : Courbure de Γ en p : $\langle \rho''(t), \tau(\rho(t)) \rangle$ [illegible]

Thm 10 : Γ est entièrement déterminée par κ [illegible]

Ex 11 :
- Γ est une droite ssi $\kappa_p = 0$.
- Γ est un cercle de rayon $R > 0$ ssi $\kappa_p = \frac{1}{R}$

Pour $\kappa(t) = \dfrac{\det(\rho'(t), \rho''(t))}{|\rho'(t)|^3}$

c) Applications en géométrie

Ex : Cycloïde

Ex : satellite

Rq : Ellipses, paraboles, hyperboles sont les courbes de [illegible] coniques.

c) Utilisation des courbes pour la connexité

Def 15 : Chemin.
Connexité par arcs [Gourdon] [Hauchecorne]

Ex 16 : $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs
- L'épigraphe d'une fonction continue est connexe par arcs [Queffélec, Topologie]
- Un convexe d'un evn est connexe par arcs. [

Thm 17 : connexe par arcs ⇒ connexe

Ex 18 : Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}[A]$. [?] [illegible]

App 19 : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Thm : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

$GL_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes : $GL_n^+(\mathbb{R})$, $GL_n^-(\mathbb{R})$. [Caldero] [FGN, Algèbre 2]

Prop : Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $GL_n(\mathbb{R}) \cup X \subseteq M_n(\mathbb{R})$ est 2-? X est connexe par arcs.

II. Intégrales curvilignes [Tauvel]

a) Indice

Cas Ω ouvert, γ un lacet ... la composante bornée ...

Déf 22: Intégrale curviligne

Ex 23: Sur le cercle !

$$\int_{C(a,r)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\, i r e^{it}\, dt$$

Déf 24: Indice DESSIN

Ex 25:

Prop 26: L'indice est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe, nulle sur la composante connexe non bornée

Thm 27: f possède une primitive sur Ω ssi pour tout lacet γ de Ω $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Appli 28: Il n'y a pas de détermination continue du log sur $\mathbb{C}^*$.

b) Application de l'~~homotopie~~ l'indice : Jordan

Thm 29: Jordan C^1 [SSJ]

Lemme 30: Green-Riemann pour ... [SSJ]

Thm: Inégalité isopérimétrique | DEV 1 [SSJ] [Bonnet]

c) Formule de Cauchy et application au calcul d'intégrales.

Th 31: Goursat

Th 32: Cauchy pour un convexe (admis)

Ex 33: Calcul de la TF de la gaussienne | DEV 2 [El Amrani]

Appli 34: La TF est injective sur L^1.

Cauchy

III. Étude qualitative d'équations autonomes (de ?)

On s'intéresse au système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$

où f_1, f_2 sont globalement lipschitziennes sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

a) Portrait de phase [Berthelin]

Déf : Isoclines verticales, horizontales

Déf : Point d'équilibre

Rem : Point d'équilibre est $I_0 \cap I_\infty$.

Déf : Orbites, trajectoires de (S)

Prop : Cauchy-Lipschitz.

Ω est partitionné en orbites

Déf : Portrait de phase : la partition de Ω en orbites

Ex : Portrait de phase de (S) : $\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

b) Intégrale première [Berthelin]

Déf : Intégrale première

Rem : On peut interpréter les solutions avec les paramétrages des orbites en PDP.

Les orbites sont les ~~lignes~~ courbes de niveau de l'intégrale première $E(x,y) = h$.

Ex : Pendule simple

$$\begin{cases} \theta' = v \\ v' = -\sin\theta \end{cases}$$

$$E(\ldots) = \frac{(\theta')^2}{2} - \cos\theta = \frac{v^2}{2} - \cos\theta$$