

LEÇON 265 : EXEMPLES D'ÉTUDES ET D'APPLICATIONS
DE FONCTIONS USUELLES ET SPÉCIALES

1 Indispensables

C'est une leçon de synthèse, donc il y a une grande liberté concernant la construction de cette leçon. Cependant, il semble difficile de faire l'impasse sur l'exponentielle.

- Exponentielle complexe, construction des fonctions trigonométriques
- Des développements asymptotiques ou en séries entières
- Applications de ces fonctions : ne pas se restreindre à une simple étude des propriétés d'une fonction
- Une fonction spéciale (voire deux si elles sont en lien)
- Des graphes de fonctions!

2 Conseils et suggestions

- Le rapport du jury 2021 est plein de ressources.
- Les applications géométriques sont les bienvenues : détermination du logarithme complexe, ...
- Le calcul d'intégrales de fonctions usuelles constitue une riche thématique : primitives de fractions rationnelles (faisant apparaître $\ln$ et $\arctan$), de fractions rationnelles trigonométriques (règle de BIOCHE), intégrale de DIRICHLET...
- Les transformées de FOURIER ou LAPLACE constituent des applications substantielles.
- Pourquoi se restreindre à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$? Les fonctions matricielles peuvent constituer une jolie ouverture.
- Analyse complexe de qualité, en étudiant le logarithme complexe, Γ , β , voire jusqu'à la formule des compléments ou la formule de STIRLING
- Théorie des nombres : ζ , caractères de DIRICHLET, séries L
- Probabilités : loi gamma, beta, fonction d'erreur, jusqu'à de la statistique (voir le plan de P. MAURER)

3 Rapports du jury

2022 "Si les fonctions usuelles élémentaires (logarithme, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc) font partie de la leçon et doivent être maîtrisées par les candidats, le jury attend un panel d'exemples plus ambitieux. Il ne s'agit bien sûr pas d'être exhaustif, et l'on se gardera de présenter une leçon catalogue. Il s'agit plutôt de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ , η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives. On peut très bien organiser l'exposé en fonction des techniques mathématiques utilisées, ou selon les applications envisagées.

Pour les candidats solides, la résolution d'équations aux dérivées partielles, la théorie analytique des nombres, les propriétés de stabilité de certaines lois en probabilités, les applications diverses des polynômes orthogonaux, etc., sont des sources d'inspiration possibles pour cette leçon."

2018 – 2021 "Cette leçon de synthèse doit permettre d'explorer de nombreux pans du programme. Les candidats peuvent proposer avec bonheur des contenus et points de vue variés. Évidemment, la leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques). Le jury attend surtout d'un agrégé qu'il soit en mesure de présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales de ces fonctions, qu'il sache les tracer sans difficultés, qu'il puisse mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi que discuter leurs prolongements éventuels, leurs développements de Taylor ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Il faut absolument éviter l'écueil d'une taxonomie fastidieuse et dépourvue de motivation; il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, par exemple une étude approfondie (d'une) des fonctions Γ , ζ ou θ , leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'application de ces fonctions.

Il y a donc bien des manières, très différentes, de construire valablement cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :

- en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
- en probabilités où la loi normale et la fonction erreur sont évidemment incontournables mais on peut aussi évoquer les lois Gamma et Bêta, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER ou plus simplement comme la loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, la loi ζ et ses liens avec la théorie des nombres, ...
- en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLET pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
- il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
- en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
- en algèbre en abordant les fonctions elliptiques et la fonction $\wp$ de WEIERS-TRASS.

Là encore, le jury renouvelle sa mise en garde d'éviter de faire un catalogue qui s'avérerait stérile, il s'agit bien plutôt de se tenir à détailler l'un ou l'autre de ces points de vue. Cette leçon doit être l'occasion de montrer un véritable investissement personnel, adossé aux goûts du candidat."

2019, réunion "Cette leçon a un très bon bilan et a été très discriminante. Les candidats ont évité l'effet « catalogue », il y a eu des exemples variés et des réinvestissements réussis. Par exemple, on a entendu des développements intéressants sur la fonction Gamma. En revanche, certains candidats ont été déstabilisés par des questions sur la fonction $\arccos$..."

2018, réunion "Beaucoup de plans et d'approches possibles. On peut viser des niveaux différents, mais cela réclame de faire des choix et des capacités de synthèse. **Un cours de fonctions spéciales est un cours sur les fonctions dont l'enseignant a envie de parler.**"

4 Développements possibles

Cette leçon est l'occasion de ne pas se créer de nouveaux développements, mais de recaser intelligemment des développements d'autres leçons, selon les fonctions dont on a envie de parler.

exp

Construction de l'exponentielle complexe [Rudin]

Construction de π

Γ

Prolongement holomorphe + formule d'Euler [ZQ]

Prolongement + formule de Weierstrass [ZQ]

Formule des compléments [Bernis] [Stein-Shakarchi]

Formule de Stirling

Théorème de Bohr-Mollerup : caractérisation de Γ par la log-convexité [Rudin], [Rombaldi]

ζ

Expression de $\zeta(2k)$ [FGN, Analyse 2]

Équation fonctionnelle de ζ

Prolongement méromorphe [ZQ]

Convergence des séries de Dirichlet [ZQ], [rapport 2022]

β

Équation fonctionnelle + volume de l'hyperboule [Amar-Mathéron]

Marche aléatoire [131 devs]

Exponentielle de matrices

Différentielle de l'exponentielle de matrices [Rouvière]

L'exponentielle est un homéomorphisme [Caldéro]

Surjectivité de l'exponentielle matricielle [Mansuy-Mneimné], [Barthelin]

Logarithme complexe

Le jury mentionne que le log complexe donne des développements intéressants...

Fonctions usuelles

Méthode archimédienne pour approcher π [131 devs]

Polynômes orthogonaux [BMP]

Transformée de FOURIER

La fonction caractéristique caractérise la loi [Ouvrard], [abarrier]

Probabilités

Des développements presque sûrement intéressants...