246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

Cadre : On définit le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on identifie les fonctions sur $\mathbb{T}$ aux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On définit les espaces de fonctions 2π-périodiques $C^0(\mathbb{T})$, $L^1(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$.
En particulier, on étudiera $L^2(\mathbb{T})$, espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

I. COEFFICIENTS DE FOURIER

a) Définitions, premières propriétés

Def 1 : Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$. On définit le n-e coefficient de Fourier de f, noté $c_n(f)$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$.

Def 2 : On appelle série de Fourier de f la série formelle $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e_n$, avec $e_n : t \mapsto e^{int}$. On note $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles symétriques associée à cette dernière.

Rem 3 : Les séries de Fourier sont des exemples de séries trigonométriques, et $S_N(f)$ de polynôme trigonométrique.

Ex 4 : La série de Fourier de $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto |\theta|$ prolongée par 2π-périodicité est $\frac{\pi}{2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{-1+(-1)^n}{\pi n^2}$. à vérifier

Rem 5 : On définit de même des coefficients de Fourier "réels", par
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$, et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.
On a alors les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$, et si f est paire, alors les $b_n(f)$ sont nuls, et si f est impaire, les $a_n(f)$ sont nuls.

Prop 6 : L'application $f \mapsto c_n(f)$ est linéaire sur $L^1(\mathbb{T})$.

Prop 7 : Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors :
- $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$ où $\tau_a f(x) = f(x-a)$
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)\, e_n$
- Si de plus $f \in C(\mathbb{T})$ et C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = -in\, c_n(f)$

Thm 8 : [lemme de Riemann-Lebesgue]
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $c_n(f) \xrightarrow{|n|\to+\infty} 0$.

Prop 9 : Soit $f \in C^k(\mathbb{T})$ pour $k \geq 2$. Alors $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Principe de localisation ?

Thm 10 : [injectivité des coefficients de Fourier]
Si $f \in C^0(\mathbb{T})$ vérifie $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f \equiv 0$.

b) Théorie L^2 des séries de Fourier

Thm 11 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. ⚠ utilise Cor 27

Corollaires 12 : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$.
- $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, i.e. $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$, où la série converge au sens de la norme $\|\cdot\|_2$.
- [égalité de Parseval]
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$
- l'application $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une isométrie linéaire bijective.
- [égalité de Plancherel]
pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$, $\langle f, g\rangle_{L^2} = \langle c_n(f), c_n(g)\rangle_{\ell^2}$.

Corollaire 13 : Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$, et C^1 par morceaux.
Alors $S_N(f)$ converge normalement vers f.

Application 14 : En appliquant Parseval, la fonction f définie à l'exemple 4 permet d'obtenir les égalités $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Corollaire 10 b : Si $f \in C^0(\mathbb{T})$, et $S_N(f)$ est absolument convergente, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Application 10 c : La fonction f de l'exemple 4 donne $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

El Amrani SS

II - CONVERGENCE PONCTUELLE

La convergence de la série de Fourier de f vers f n'est pas aussi simple dans le cas $L^1(\mathbb{T})$ ou même $C^0(\mathbb{T})$ que dans le cas $L^2(\mathbb{T})$. On a le cas pathologique suivant :

Ex 15 : La fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ définie par $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$ (admis) est continue sur $\mathbb{T}$ mais sa série de Fourier diverge en 0.

a) Un outil : la convolution périodique

Def 16 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on introduit le produit de convolution de f et g sur $\mathbb{T}$ par : $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy$.

Prop 17 : Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{T})$, $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
De plus, $c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_n(g)$.

Def 18 : Une suite de fonctions $\{K_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{T}$ est une approximation de l'unité si :

a) il existe M tel que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(x)|\, dx \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\, dx = 1$

c) $\forall\, 0 < \delta < \pi$, $\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n|(x)\, dx \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

b) Le théorème de Dirichlet

Def 19 : Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Dirichlet sur $\mathbb{T}$ par :
$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$
Ce noyau vérifie les conditions b) de la Def 18, mais $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx \geq c \log N$ lorsque $N \to +\infty$, pour une constante c.

Prop 20 : $D_N * f = S_N(f)$.

Thm 21 : [Dirichlet]
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$. On suppose que f admet des limites à gauche et à droite de t_0, et que $h \mapsto \frac{1}{h}\left(f(t_0+h) + f(t_0-h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)\right)$ soit bornée au voisinage de 0.
Alors : $S_N(f)(t_0) \xrightarrow{N \to +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.

Corollaire 22 : Si f est $C^1(\mathbb{T})$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{T}$,
$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$
En particulier, $S_N(f)$ converge vers f en tout point de continuité.

c) Convergence au sens de Césaro

Def 23 : Pour $N \in \mathbb{N}$, on introduit le noyau de Fejér d'ordre N par
$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_N.$$

Prop 24 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N} e_n\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}\right)$.

Prop 25 : $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité. DEV 1

Thm 26 : [Fejér]
- Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$, alors $\|f * F_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ $\forall N \geq 1$, et $\lim_{N \to +\infty} \|f * F_N - f\|_\infty = 0$
- Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p < +\infty$, alors $\|f * F_N\|_p \leq \|f\|_p$ $\forall N \geq 1$, et $\lim_{N \to +\infty} \|f * F_N - f\| = 0$.

Corollaire 27 : [théorème de Weierstrass trigonométrique]
Toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ peut être approchée par une suite de polynômes trigonométriques.

Corollaire 28 : [injectivité de la transformée de Fourier]
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $f \equiv 0$.

Corollaire 29 : Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $c_n(f) = O(\frac{1}{n^k})$.
Alors $f \in C^{k-2}(\mathbb{T})$.

Lemme : Continuité des translations dans L^p.

III – APPLICATIONS

a) Résolution de l'équation de la chaleur

FGN Analyse 1.

Thm 30 : Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $L^1(\mathbb{T})$, continue, C^1 par morceaux. Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ vérifiant :

i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(0, x) = u_0(x)$;

iii) $u(t, \cdot)$ est 2π-périodique ;

iv) u est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

b) Inégalité isopérimétrique

Def 31 : On appelle courbe paramétrée une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, telle que $\gamma \in C^1([a,b])$, et $\forall s \in [a,b]$, $\gamma'(s) \neq 0$.
L'image de la courbe est notée Γ et appelée une courbe.

Def 32 : On appelle courbe de Jordan toute courbe continue vérifiant :
- Fermée : $\gamma(a) = \gamma(b)$
- sans point double : $\forall s_1, s_2 \in [a,b]$, $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) \Rightarrow s_1 = a, s_2 = b$.

Prop 33 : Soit φ un C^1-difféomorphisme $[c,d] \to [a,b]$. Alors la courbe paramétrée η définie par $\eta(t) = \gamma(\varphi(t))$ a la même image que γ. Le fait d'être fermé et sans point double ne dépend pas de la paramétrisation.

Def 34 : Si Γ est paramétré par $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, on définit la longueur de γ par $l = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds = \int_a^b \left(x'(s)^2 + y'(s)^2\right)^{1/2} ds$.
La longueur de Γ ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Def 35 : On dit que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation par longueur d'arc si $\forall s \in [a,b]$, $|\gamma'(s)| = 1$.

Thm 36 : Toute courbe admet une paramétrisation par longueur d'arc.

Thm 37 : [Jordan]
$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ possède exactement deux composantes connexes : l'une bornée C_i, l'une non bornée C_∞.

Lemme 38 : En notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, on a :
$$\lambda(K) = \frac{1}{2}\left| \int_\Gamma x\, dy - y\, dx \right| = \frac{1}{2}\left| \int_a^b x(t) y'(t) - y(t) x'(t)\, dt \right|$$
$\lambda(K)$ est la surface de C_i.

Théorème 39 : [Inégalité isopérimétrique]
Soit Γ une courbe de Jordan sur $\mathbb{R}^2$, de longueur l, et A l'aire de la région enfermée par Γ. Alors :
$$A \leq \frac{l^2}{4\pi},$$
avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

c) Critère d'équidistribution de Weyl