241

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Cadre : X est un ensemble, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E, f une fonction de X dans E.

I – CONVERGENCES

a) Suite de fonctions

Def 1 : On dit que :
- $(f_n)_n$ converge simplement vers f si $\forall x\in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, notée $f_n \xrightarrow{u} f$, si :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \Rightarrow (\forall x\in X, \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon)$

Rem 2 : La suite $(f_n)_n$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}(x)$, mais la convergence n'est pas uniforme.

Prop 3 : f_n converge uniformément vers f si et seulement si la suite μ_n définie par $\mu_n = \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|$ converge vers 0.

Ex 4 : La suite définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Thm 5 : [critère de Cauchy uniforme]
Si E est complet, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \forall x\in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$.

b) Séries de fonctions

Def 6 : On appelle série des fonctions f_n, et on note $\sum_n f_n$, la suite $(S_n)_n$ où pour tout n, $S_n : \begin{cases} X \to E \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \end{cases}$.
S_n est appelée la ne somme partielle de la série $\sum_n f_n$.
Si la série converge simplement sur X, sa limite est appelée somme de la série, et le reste d'ordre n est défini par $x \mapsto R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Rem 7 : Une série étant une suite, on introduit la même notion de convergence uniforme.

On a de plus les notions de convergence suivantes :

Def 8 : On dit que $\sum f_n$ converge absolument sur X si pour tout $x\in X$, la série réelle $\sum_n \|f_n(x)\|$ converge.

Def 9 : Supposons E complet. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions bornées de X dans E est un espace de Banach, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$.
On peut ainsi définir la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$, et si la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge.

Thm 10 : Si E est complet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{convergence normale} & \Rightarrow & \text{convergence uniforme} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{convergence absolue} & \Rightarrow & \text{convergence simple.} \end{array}$$

C-ex 11 : La série $\sum_n (-1)^n u_n$, où $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{n^2+x^2}$ converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais pas normalement.

II – CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ, INTÉGRABILITÉ

a) Continuité, dérivabilité

Thm 12 : Supposons que X est un espace vectoriel normé.
Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et si toutes les fonctions f_n sont continues en x_0, alors f est continue en x_0.

Rem 13 : La suite $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ montre que ceci n'est pas une équivalence.

Thm 14 : Supposons que $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, et E complet. On suppose de plus que :
- $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est dérivable, et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ simplement sur $[a,b]$,
- la suite des dérivées $(f_n')_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors f est dérivable sur $[a,b]$, et $\forall x\in[a,b]$, $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Thm 15 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[a,b]$ dans un Banach E. On suppose de plus que :
- il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge ;
- la suite des dérivées $(f_n')_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f de classe C^1, et $f' = g$.

Corollaire 16 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^p sur $[a,b]$, à valeurs dans un espace de Banach E.
On suppose que pour tout $k \leq p$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers g_k sur $[a,b]$.
Alors la limite uniforme f est de classe C^p, et vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour tout k.

b) Intégrabilité

Thm 17 : Soit $(f_n)_n$ une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans E complet. Alors la fonction limite f est continue, et $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

III – CONVERGENCE DANS LES ESPACES L^p.

Cadre : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ suite de fonctions de X sur $\mathbb{C}$.
On suppose connues les définitions des espaces L^p, munis des normes p.

Def 18 : On dit que $(f_n)_n$ converge vers f en norme p ou dans L^p, si $(\|f_n - f\|_p)_n$ tend vers 0, autrement dit si $\left(\left(\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}\right)_n$ tend vers 0.

Thm 19 : [convergence monotone]
Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives.
Posons $f : x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
Alors la fonction f est mesurable, et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Application 20 : L'intégrale de Lebesgue est linéaire.

Corollaire 21 : [Lemme de Fatou]
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :
$\int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Thm 22 : [convergence dominée]
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables, vérifiant :
- pour presque tout x, la suite $(f_n(x))_n$ converge simplement vers $f(x)$;
- il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction limite f est intégrable, et $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

Application 23 : [Riesz-Fischer]
Soit $1 \leq p < +\infty$.
L'espace L^p est complet.
L'espace L^∞ est également complet.

DEV 1

IV – DES SÉRIES DE FONCTIONS PARTICULIÈRES : LES SÉRIES ENTIÈRES

a) Définition, convergence.

Def 24 : On appelle série entière de suite associée $(a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la série de fonctions $\sum_n f_n$, où $f_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $z \mapsto a_n z^n$.

(ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Prop 25 : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{K}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente ;

2) pour tout r avec $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Def 26 : Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On définit son rayon de convergence par
$R = \sup\{r \geq 0 \text{ tq la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$.

D'après le lemme précédent,

- la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$;
- la série $\sum_n a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$;
- la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq r < R$.

Rem 27 : $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$, dont le rayon de convergence est 1, converge en tout point z tel que $|z| = 1$;
mais $\sum_n \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1$ et diverge en tout autre point z tel que $|z| = 1$.

Thm 28 : [Hadamard]
Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ est donné par :
$R = \frac{1}{L}$ où $L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, avec la convention $\begin{cases}\frac{1}{0} = +\infty \\ \frac{1}{+\infty} = 0.\end{cases}$

Ex 29 : Le rayon de convergence de $\sum_n 2^n z^{2n}$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Def 30 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R'. Alors on peut définir :

- la somme des séries par $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ de rayon de convergence $R'' \geq \inf\{R, R'\}$
- le produit de Cauchy des séries par $\sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$.

b) Des propriétés utiles notamment en dénombrement.

Thm 31 : L'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Thm 32 : L'application $f : \begin{cases}]-R, R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$ est de classe C^1.

La série entière $\sum_n n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_n a_n z^n$ et on a pour tout $x \in]-R, R[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Thm 33 : (mêmes notations)
Si $[a, b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n\,dx$

Corollaire 34 : Une primitive de f est donnée par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Thm 35 : [Unicité de la décomposition en séries entières]
Si f et g la somme de deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ vérifient $f = g$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors pour tout n, $a_n = b_n$.

Application 36 : [nombres de Bell] DEV 2

Pour tout $n \geq 0$, on désigne par B_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$
- la série entière de variable réelle $\sum_n \frac{B_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence non nul et ~~sa somme~~ vérifie $\forall t \in]-R, R[$, $S'(t) = \exp(t) S(t)$.
- [Dobinski] $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \frac{1}{e} \sum_{p\geq 0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$