219_ Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, \|\cdot\|)$.

I_ EXISTENCE ET UNICITÉ D'EXTREMA

Def 1 : On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en $a \in A$ s'il [Rou] existe un voisinage V de a tel que
$\forall x \in V \cap A$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $\forall x \in V \cap A$, $f(a) \leq f(x)$).
Lorsque l'inégalité est vraie pour tout $x \in A$, on dit que f admet un maximum (ou un minimum) global en a.

Quitte à considérer $-f$, on ne considère que les minimums.

Exemple 2 : $x \mapsto x^2$ admet un minimum global en 0
$x \mapsto \cos(x)$ admet un maximum global en les $(2k\pi)_{k \in \mathbb{Z}}$
$x \mapsto x(x-1)/(x+1)$ admet un minimum local mais pas d'extrema.

a) Compacité [Gourdon]

Thm 3 : Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. [G]

Contre-ex 4 : X compact : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto$ ~~arctan~~ $\exp(x)$ est continue et n'admet ni min ni max.
f continue : $f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ n'admet pas de maximum.

Application 5 : Soit K un compact de E, F un fermé de E, avec K, F disjoints.
Alors $x \mapsto d(x,F)$ atteint son infimum, qu'on note $d(K,F)$.

Application 6 : Soit f une application définie sur un compact K et contractante.
Alors f admet un unique point fixe.

Application 7 : Si E est de dimension finie, et f continue telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est minorée et atteint son minimum.

Ex 8 : Soit F un sev de E de dim finie. Alors pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte.

b) Convexité [BMP]

¡ À revoir.

Def 9 : Un ensemble X est convexe si pour tout x, y de X, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$.

- Soit $X \subset E$ convexe, $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
- f est strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et tout $\lambda \in]0,1[$.

Thm 10 : Si X est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors f est continue sur $\mathring{X}$.

[G] **Thm 11** : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors tout minimum local est un min global.

Contre-ex : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe mais pas de minimum

Prop 13 : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Alors s'il existe au plus un point minimisant f.

Application 14. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Alors
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \end{cases}$$
admet un unique point minimum sur $\mathbb{R}^n$.

c) Minimum dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert, $\|\cdot\|$ la norme dérivant du produit scalaire de H.

Thm 16 : [projection sur un convexe fermé]

Soit C une partie fermée convexe non vide de H. Alors :

$\forall x \in H, \exists! \, p \in C$ tq $\|x-p\| = d(x, C)$.

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C$,

$\mathrm{Re} \langle x-p, c-p \rangle \leq 0$.

Corollaire 17 : Soit F un sev de E. Alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$. En particulier, $H = F \oplus F^\perp$.

C-ex 18 : Si C n'est pas convexe : $H = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R} \setminus]-1,1[$. Alors 1 et -1 minimisent la distance de 0 à C.

Application 18 : Théorème de représentation de Riesz.

Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\varphi(v) = \langle f, v \rangle$.

De plus, $\varphi \mapsto f$ est une isométrie : $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H$.

Application 19 : Existence et unicité de l'adjoint d'un opérateur $T \in H'$.

d) Maximum d'une fonction holomorphe

Dans cette partie $E = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$, où Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Thm 20 : [formule de la moyenne]

Soient $a \in \Omega$, $r > 0$ tq $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Alors $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, dt$.

bof

Thm 21 : Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \Omega$, alors f est constante.
(principe du maximum local)

Thm 22 : On suppose f continue sur $\overline{\Omega}$. Notons M le maximum de $|f|$ sur $\partial\Omega$. Alors

- $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$; (on dira $\max_{\Omega} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$.)
- $(\exists z_0 \in \Omega$ tq $|f(z_0)| = M) \Rightarrow f$ est constante sur Ω.

Application 23 : Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $\overline{D(0,1)} \subset U$. Supposons que $f \in \mathcal{H}ol(U)$ vérifie $f(0) = 1$ et $|f(z)| \geq 2$ sur le cercle unité. Alors f s'annule sur $D(0,1)$.

Corollaire 23 : Si f ne s'annule pas et $\sup_{\Omega} |f|$ est atteint, alors f est constante.

Application 25 : [D'Alembert-Gauss] ?

II - CARACTÉRISATION D'EXTREMA PAR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

a) Condition du premier ordre [Rouvière]

Ici, $E = \mathbb{R}^n$ et A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Def 24. Si f est différentiable en $a \in A$ et si $d_a f = 0$, alors a est ~~...~~ un point critique de f.

$\updownarrow$

Prop 25. Si f est différentiable en $a \in A$ et admet un extremum local en a, alors $d_a f = 0$.

C-ex 26. ▷ La réciproque est fausse : $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$ admet une dérivée s'annulant en 0, mais n'admet pas d'extremum en 0.

▷ A non ouvert : $t \in [0,1] \mapsto t$ admet un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule pas.

Thm 27. [Rolle]

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors il existe c tel que $f'(c) = 0$.

Application 28. Théorème des accroissements finis.

Application 29. Une fonction dérivable dans un intervalle I de dérivée ? est convexe ssi f' ...

b) Conditions du second degré [Rouvière]

Thm 29. Si f admet en a un minimum local en $a \in A$ et si f est 2-fois différentiable en a, alors $d_a f = 0$ et pour tout $h \in E$, $d_a^2 f(h,h) \geq 0$.

Thm 30. Si E est de dimension finie, si $df(a) = 0$ et si pour tout $h \neq 0$, $d_a^2 f(h,h) > 0$), alors f admet en a un minimum local strict.

Signalons : cet égard un critère pour montrer que D_a^2 est une forme quadratique définie positive.

[Critère de Sylvester] Soit M la matrice de $D_a^2 \in S_n(\mathbb{R})$ [Gourdon, Algèbre]

▷ Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $M_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$.

M est définie positive ssi pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$.

Exemple 32. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4} \end{cases}$ admet $(0,0)$ pour point selle et $(0, \pm\sqrt{2})$ pour minimums globaux.

Exemple 33. Soit x_0 un point critique de f tel que $D^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Alors

- si $rt - s^2 > 0$ et $r+t > 0$, x_0 est un minimum local
- et $r+t < 0$, x_0 est un maximum local
- si $rt - s^2 < 0$, alors x_0 n'est pas un extremum.
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure

Ex 34. $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4$ admet un minimum global strict en $(0,0)$ malgré que $D^2 f(0,0) = 0$.

VI - Problèmes d'optimisation

a) ~~Méthode du gradient~~ Optimisation sous contraintes [Rouvière]

Def : On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m au voisinage de $x_0 \in M$

Thm : [Extrema liés]
Soient $f, g_1, \dots, g_p : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, des fonctions de classe C^1, et $M = \{x \in U \,;\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. On suppose que $f|_M$ admet un extremum local en a, et que la famille $(D g_i(a))_{1 \le i \le p}$ est libre. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que
$Df(a) = \sum \lambda_i Dg_i(a)$

b) Une optimisation géométrique [SS][Benin]

On se donne $a<b$ et c, d des réels.

Def :
- On appelle courbe paramétrée une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\gamma \in C^1([a,b])$ et $\forall s \in [a,b]$, $\gamma'(s) \neq 0$.

  On note alors $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$ et on dit que Γ est une courbe.
- Γ est dite simple si elle ne s'intersecte pas i.e. $\forall s_1, s_2 \in [a,b]$, $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$ ou $s_1 = a$ et $s_2 = b$.
- On dit que Γ est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Def : On appelle longueur d'une courbe Γ paramétrée par $\gamma = (x, y)$ le réel
$$\ell(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds = \int_a^b (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Def : On dit qu'une paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ est par longueur d'arc si pour tout s, $|\gamma'(s)| = 1$. Alors la courbe évolue à vitesse constante, et la longueur de Γ est $b-a$.

Thm. Toute courbe paramétrée simple admet une paramétrisation par longueur d'arc.

Thm. [Inégalité isopérimétrique]
Soit Γ une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$ de longueur ℓ, et $\mathcal{A}$ l'aire de la région enfermée par Γ, bien définie d'après le théorème de Jordan. Alors
$$\mathcal{A} \le \frac{\ell^2}{4\pi}$$
avec égalité ssi Γ est un cercle.