215 Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I_ DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉES PARTIELLES

a) Différentielle

Def 1 : Une application $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite différentiable en a s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$, quand $h \to 0$.
Si φ existe, elle est unique, et s'appelle différentielle de f en a, notée $Df(a)$.

Def 2 : Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable en U, et $Df : \begin{array}{l} U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a \mapsto Df(a) \end{array}$ est appelée application différentielle de f.
Si Df est continue, on dit que f est de classe C^1 sur U.

Ex 3 : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Df(a)$ est la multiplication par le nombre dérivé $f'(a)$.
On reconnait la définition de dérivée : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = o(h)$.

Ex 4 : Soit B une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto B(x,x) \end{array}$
Alors f est différentiable en tout point a de $\mathbb{R}^n$, et $Df(a)h = 2B(a,h)$.

Prop 5 : Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Def 6 : Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Si $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, f est dite dérivable en a selon le vecteur v, et on note $f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

Prop 7 : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur en a.

Application 8 : Soient $X, H \in M_n(\mathbb{R})$. $D\det(X)H = Tr({}^t\mathrm{Com}\, X \cdot H)$.

Contre-ex 9 : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable selon tout vecteur en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

b) Dérivées partielles

Def 10 : Si pour $i \in \{1, \dots, n\}$, f est dérivable en a selon e_i, on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i, notée $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ou encore $Df(a)e_i$, ou $\partial_i f(a)$. On a alors $Df(a)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . h_i$.

Def 11 : Pour $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, il existe un unique vecteur $\mathrm{grad}\, f(a) \in \mathbb{R}^n$, appelé gradient de f en a, aussi noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$, tel que $\forall h$, $Df(a)h = \mathrm{grad}\, f(a)$
Dans une base orthonormée, $\mathrm{grad}\, f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$.

Ex 12 : $f(x,y,z) = xy + yz + xz$. Alors $\mathrm{grad}\, f(a,b,c) = (b+c \quad a+c \quad a+b)$.

Def 13 : Pour $f : U \to \mathbb{R}^p$, $Df(a)$ est définie, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, par la matrice jacobienne $Jac(f)(a)$, composée des dérivées partielles.

Prop 14 : [différentiation composée]
Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, avec U, V ouverts, tels que $\varphi(V) \subset U$.
On écrit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ avec $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$.
Soit $a \in V$ tel que φ est différentiable en a, et f en $\varphi(a)$.
Alors $F := f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ est différentiable en a,
et $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $\frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) . \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a)$,
c'est-à-dire $Jac(f \circ \varphi)(a) = Jac(f)(a) \cdot Jac(\varphi)(a)$.

Application 15 : Si f et $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont différentiables en a, alors fg l'est aussi, et $D(fg)(a) = Df(a) . g + f . Dg(a)$.

Thm 16 : [inégalité des accroissements finis]
Soit $[a,b]$ un segment de droite contenu dans U, $k \in \mathbb{R}$.
On suppose f continue sur $[a,b]$, différentiable sur $]a,b[$,
et pour tout $x \in]a,b[$, $\|Df(x)\| \leq k$.
Alors $\|f(a) - f(b)\| \leq k \|a - b\|$.

Corollaire 17 : Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, et $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U.

Prop 18 : $f \in C^1(U)$ ssi toutes les dérivées partielles de f sont continues sur U.

Exemple 19 : $f : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Contre-exemple 20 : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est différentiable en 0, mais f' n'est pas continue en 0.

II. DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

a) Classe C^2, classe C^k

<u>Def 21</u> : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, différentiable en tout point de U. Si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, l'application $Df_i : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ est différentiable au point a de U, on dit que f est deux fois différentiable en a, et on note $D^2 f(a) = D(Df)(a)$ la différentielle seconde en a. Si la différentielle seconde est continue en tout point de U, on dit que f est de classe C^2 sur U.

<u>Thm 22</u> : [Schwarz]
Supposons f deux fois différentiable en $a \in U$.
Alors $D^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique.
Autrement dit, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

DEV 1

<u>Application 23</u> : Soient $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $D\exp(X) H = e^X \sum_{k \geq 0} \frac{(-\operatorname{ad} X)^k}{(k+1)!} H$.

<u>Rem 24</u> : D'après le Thm 22 et la Prop 18, si f admet des dérivées partielles continues à l'ordre 1 et 2 sur U, alors $f \in C^2(U)$.

<u>Contre-ex 25</u> :
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, admet des dérivées partielles à l'ordre 2 en tout point, mais distinctes à l'origine.

Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence une dérivée partielle d'ordre k, par la relation $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$.
Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^k si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U.
Enfin, f est dite de classe C^∞ sur U si $f \in C^k(U)$ pour tout k.

b) Formules de Taylor

<u>Notations 26</u> : On note
$$D^k f(a)(h)^k = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(a).$$

<u>Thm 27</u> : [Formule de Taylor-Young]
Si f est k fois différentiable en $a \in U$, on a, lorsque h tend vers 0 :
$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^i f(a)(h)^i + o(\|h\|^k).$$

<u>Thm 28</u> : [Formule de Taylor avec reste intégral]
Si $f \in C^{k+1}(U)$, et si $[a, a+h] \subset U$, on a :
$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^i f(a)(h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} \, dt.$$

<u>Application 29</u> : [Lemme d'Hadamard]
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^\infty$, et $f(0) = 0$, alors il existe $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \, g(x_1, \dots, x_n)$.

c) Calcul d'extrema

On ne considère ici que des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui possède un ordre.

<u>Def 30</u> : $D^2 f(a)$ est donnée par la matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, appelée matrice hessienne de f en a. Elle définit une forme bilinéaire.

<u>Prop 31</u> : Si f admet un extremum relatif au point $a \in U$, et si f est différentiable en a, alors a est un point critique de f, ie $Df(a) = 0$.

<u>Rem 32</u> : Ce résultat n'est vrai que pour f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

<u>Thm 33</u> :
- Si a est un minimum local de f, et si $D^2 f(a)$ existe, alors $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive ;
- si $Df(a) = 0$ et $Df^2(a)$ est une forme quadratique <u>définie</u> positive, alors a est un minimum local strict de f.

<u>Rem 34</u> : En $a = 0$, $f : x \mapsto x^3$ vérifie $D^2 f(a) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum.

On rappelle enfin un critère pour déterminer qu'une forme quadratique est définie positive.

Prop 35 : [critère de Sylvester]

Soit $M = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n}$ une matrice symétrique.

M est définie positive ssi $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det\left((a_{ij})_{1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k}\right) > 0$.

Application 36 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $Df(a) = 0$, de hessienne en a $\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$.

Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a.

III - GRANDS THÉORÈMES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Thm 37 : [point fixe]

Soit X un fermé de $\mathbb{R}^n$, $F : X \to X$. On suppose F contractante, càd. k-lipschitzienne avec $k < 1$. Alors il existe un unique $a \in X$ tel que $F(a) = a$. De plus, ce point s'obtient comme limite de la suite des itérés, $u_{n+1} = F(u_n)$, et $\|x_n - a\| \le \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\|$.

Contre-ex 38 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ n'admet pas de point fixe, malgré $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Application 39 : Méthode de Newton-Raphson pour la recherche de zéros :

$x_{n+1} = x_n - \mathrm{Jac}(x_n)^{-1} f(x_n)$, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Application 40 : Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les fonctions globalement lipschitziennes.

Def 41 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

$f : U \to V$ est un C^k-difféomorphisme si $f \in C^k$, f est bijective et $f^{-1} \in C^k$.

Thm 42 : [inversion locale]

On suppose que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k, et $Df(a)$ est inversible. Il existe un ouvert V contenant a, un ouvert W contenant $f(a)$, tels que $f|_V : V \to W = f(V)$ est un C^k-difféomorphisme.

Application 43 : Soient $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1.

Les relations $u_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées au voisinage de a ssi $\det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n}\right) \neq 0$.

Exemple 44 : [changement de coordonnées polaires]

$$F :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \le 0\}, \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est un C^1-difféomorphisme.

Thm 45 : [inversion globale]

On suppose $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, f injective sur U, et $Df(a)$ inversible pour tout $a \in U$. Alors $f(U)$ est ouvert, et f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Contre-exemple 46 : $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local en tout point, mais pas global.

Thm 47 : [fonctions implicites]

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe C^1.

On suppose $f(a,b) = 0$, et $D_y f(a,b)$ inversible.

Alors il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$, et $D_y f(x,y)$ inversible pour tout (x,y) de $V \times W$, et $\varphi : V \to W$ tel que $(x \in V, y \in W, f(x,y) = 0) \iff (x \in V, y = \varphi(x))$.

De plus, φ est unique, et de classe C^1 sur V.

Ex 48 : Pour $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $f_y'(x,y) = 2y$. On a deux fonctions implicites :

$V_1 =]-1, 1[$, $W_1 =]0, +\infty[$, $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$V_2 =]-1, 1[$, $W_2 =]-\infty, 0[$, $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

voir dessin

Prop 49 : On a alors $D\varphi(x) = -(D_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x))$.

Thm 50 : [extrema liés]

Soient $f, g_1, \dots, g_p : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et $X = \{x \in U \mid \forall i, g_i(x) = 0\}$.

Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$, et si les différentielles $(Dg_i(a))_{i \le p}$ forment une famille libre sur $\mathbb{R}^n$, alors $(Df(a), Dg_1(a), \dots, Dg_p(a))$ est liée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, multiplicateurs de Lagrange, tels que $Df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Dg_i(a)$.

Application 51 : [inégalité arithmético-géométrique]

$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, pour $x_i > 0$.