214

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE, THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. EXEMPLES ET APPLICATIONS EN ANALYSE ET EN GÉOMÉTRIE.

Dans tout ce qui suit, p, q, n sont des entiers naturels, $k \geq 1$, et U et V sont des ouverts.

I_ DIFFÉOMORPHISMES ET THÉORÈMES D'INVERSION

a) Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale

G **Def 1** : Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to V$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si f est bijective, et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

R **Thm 2** : [inversion locale] DEV 1
Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $a \in U$ tel que la matrice jacobienne $Df(a)$ soit inversible. Alors il existe $V \subseteq U$ contenant a, et W ouvert contenant $f(a)$, tel que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $f(V) = W$.

R **Exemples 3** :
- $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, xy) \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point où $x \neq y$.
- $f : \begin{array}{l} \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times \\ z \mapsto z^2 \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point.

G **Remarques 4** :
- Le théorème est par récurrence vrai en remplaçant "$\mathcal{C}^1$" par "$\mathcal{C}^k$" ou "$\mathcal{C}^\infty$".
- La différentielle de f^{-1} vérifie pour tout $x \in U$, $df^{-1}(f(x)) = df(x)^{-1}$.

R **Contre-ex 5** : De l'importance d'être $\mathcal{C}^1$:
$f : \begin{cases} x \mapsto x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$
est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) \neq 0$, mais f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

Prop 6 : [inversion globale] R
Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose f injective sur U, et que pour tout $x \in U$, $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exemple 7 : [changement de variables en coordonnées polaires] R
$\Phi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$.

Application 8 : Calcul de l'intégrale de la gaussienne.

Thm 9 : [inversion globale holomorphe] R
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, et f est un difféomorphisme holomorphe.

b) Applications en algèbre linéaire

Prop 10 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, suffisamment proche de I_n. Alors il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $B^k = A$. BMP

Prop 11 : L'application $u \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto u^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. GT

Appli 12 : La décomposition polaire $\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{cases}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféom. GT

Prop 13 : L'application $\exp$ est différentiable en 0, et $D(\exp)(0) = Id_{M_n(\mathbb{C})}$. Elle induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en 0. 131 DEV 2

Théorème 14 : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$ 131

Corollaire 15 : $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ 131

Corollaire 16 : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$ 131

II _ THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

a) Propriétés des fonctions implicites

R **Thm 17** : [fonctions implicites]
Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a,b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ est inversible.
Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subseteq U$ et $D_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$, et un unique $\varphi : V \to W$, telles que :
$$(x \in V,\ y \in W,\ f(x,y) = 0) \iff x \in V \text{ et } y = \varphi(x).$$
De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

R **Exemple 18** : Pour $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$, selon les points de départs, on obtient deux fonctions implicites :
$$V_1 =]-1,1[,\ W_1 =]0,+\infty[,\ y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$V_2 =]-1,1[,\ W_2 =]-\infty,0[,\ y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

R **Remarque 19** : Le théorème reste vrai, en remplaçant "$\mathcal{C}^1$" par "$\mathcal{C}^k$" ou "$\mathcal{C}^\infty$".

R **Prop 20** : Dans le Thm 17, la différentielle de φ vérifie, pour $x \in V$,
$$D\varphi(x) = -[D_y f(x,\varphi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x)).$$

R **Appli 21** : [développement asymptotique de fonctions définies implicitement]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\varepsilon > 0$. On pose $f_\varepsilon(x) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$.
Pour ε assez petit, l'équation $f_\varepsilon(x) = 0$ admet trois racines distinctes, vérifiant :
$$x_1(\varepsilon) = a - \frac{a^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$x_2(\varepsilon) = b + \frac{b^3}{b-a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$x_3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - (a+b) - (a^2+ab+b^2)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Rem 22 : Théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale sont équivalents. G BMP

b) Application

Prop 23 : Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$, à valeurs dans un voisinage J de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que BMP
$$\forall P \in U,\ \forall x \in J,\quad x = \varphi(P) \iff P(x) = 0.$$
Autrement dit, la racine dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$.

Appli 24 : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. BMP

Thm 25 : [extrema liés] G
Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $(Dg_i(a))_{1 \le i \le r}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que
$$Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_r Dg_r(a).$$

Exemple 26 : Minimisation du poids d'une canette à volume constant.

Application 27 : [inégalité d'Hadamard] R
On considère le produit scalaire usuel $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors l'inégalité
$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \le \|v_1\| \dots \|v_n\|$$
avec égalité si et seulement si les v_i forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

III _ INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

a) Des questions de dimensions

On cherche à généraliser le théorème d'inversion locale pour des espaces de dimension non égale.

L **Def 28** : Une immersion (resp. une submersion) de classe $\mathcal{C}^k$ est une application de $U \subseteq \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^k$ dont la différentielle en tout point est injective (resp. surjective).

BMP **Rq 29** : • Par le théorème du rang, on a nécessairement $p \leq q$ (resp. $p \geq q$).

L • Une immersion et submersion est un difféomorphisme local par le Thm 2.

Ex 30 : • $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une immersion localement autour de tout point.

• $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2+y^2-1$ est une submersion localement autour de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

R L BMP **Prop 31** : À difféomorphisme local près à l'arrivée, il n'y a qu'une seule immersion de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$: l'injection canonique $(x_1, \dots x_p) \mapsto (x_1, \dots x_p, 0, \dots, 0)$.

R L BMP **Prop 32** : À difféomorphisme local près au départ, il n'y a qu'une seule submersion de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$: la projection canonique $(x_1, \dots x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_q)$.

R **Appli 33** : Soient $(f_1, \dots f_p)$ des fonctions $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}^n$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1}, \dots f_n$ pour obtenir un changement de coordonnées si et seulement si les différentielles $Df_1(a), \dots, Df_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.

b) Sous-variétés

L **Def 34** : Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout a de M, il existe U contenant a et V contenant 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$.

L **Thm 35** : M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

1 ▷ [définition implicite] pour tout $a \in M$, il existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$.

2 ▷ [définition paramétrique] pour tout $a \in M$, il existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant a, $V \subseteq \mathbb{R}^p$ contenant 0, et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ immersion dans $\mathbb{R}^n$ et homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

L R **Exemples 36** : • La sphère $S^n = \{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

• Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA - I_d = 0\}$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

R **Exemple 37** : [surfaces de $\mathbb{R}^3$]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$, $(a,b,c) \in S$ tel que $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.

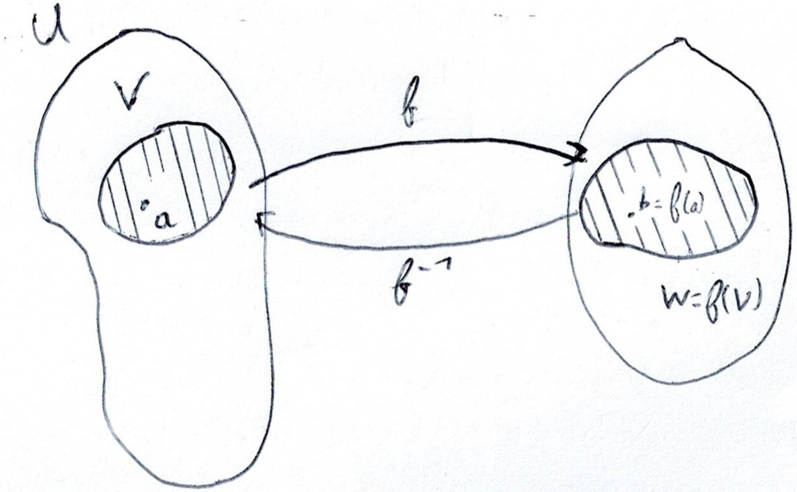
Alors l'application $F : (x,y,z) \mapsto (x, y, f(x,y,z))$ définit un difféomorphisme local entre S et le plan $\{(u,v,0) \in \mathbb{R}^3\}$.

Def 38 : On appelle espace tangent à M en a, l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (I intervalle ouvert contenant 0) dérivable tels que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. R

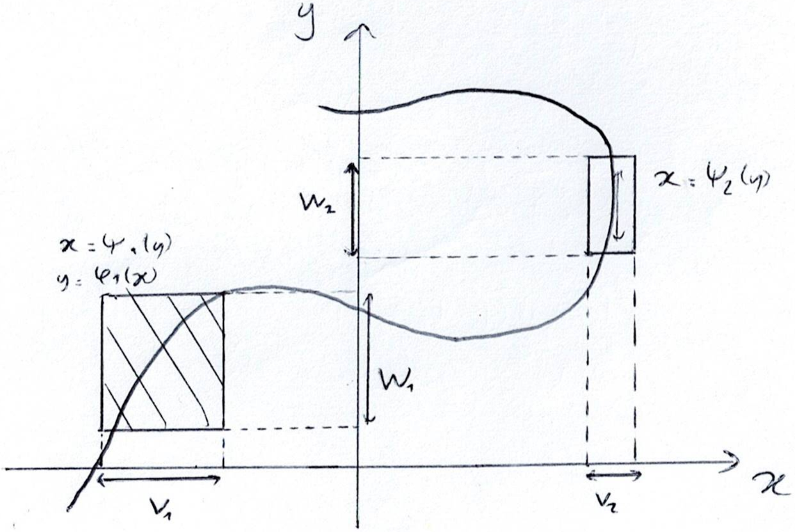
Prop 39 : Dans les notations du Thm 35, l'espace tangent à M en a est le noyau de $Dg(a)$ ou l'image de $Dh(0)$. R

Application 40 : L'intersection d'une sphère de centre 0 et de rayon R, et du cylindre vertical de base le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1, est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, de tangente l'intersection des plans tangents. R

Application 41 : Interprétation géométrique du théorème des extrema liés R



BMP FIGURE 1 – Le théorème d'inversion locale



BMP FIGURE 2 – Le théorème des fonctions implicites

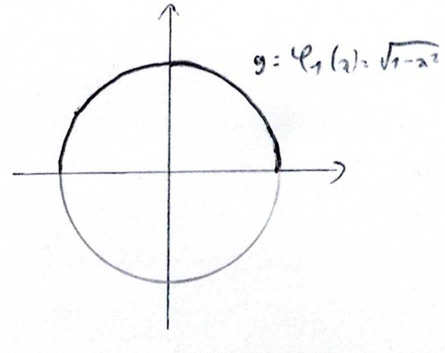


FIGURE 3 – Fonction implicite sur le cercle

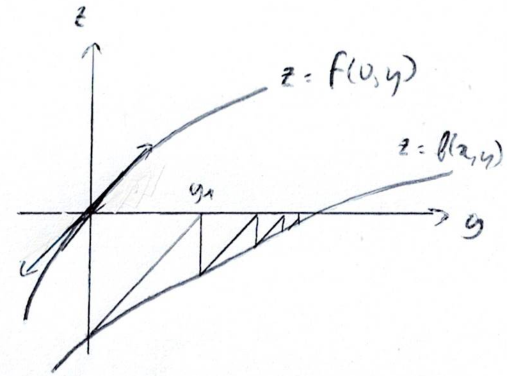


FIGURE 4 – Preuve du théorème des fonctions implicites : $y = \varphi(x)$ est limite de $y_{n+1} = y_n - D_y f(0,0)^{-1} f(x, y_n)$. R R

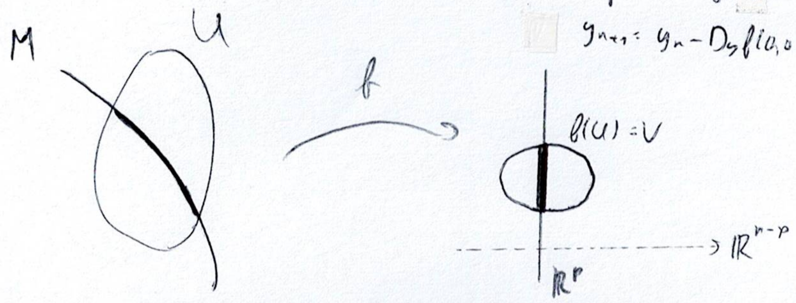


FIGURE 5 – Sous-variété et définition via le difféomorphisme. L

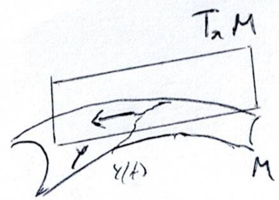


FIGURE 6 – Espace tangent

Références :

BMP Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.

G Gourdon, Analyse.

L Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles

R Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

131 Lesesvre, et al. 131 développements pour l'oral

GT Gonnord, Tosel, Calcul différentiel