151 — Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Utilisation du déterminant en géométrie.

A Orientation de l'espace — Gri 4.11

Définition 1 : On dit que les bases $\{e_i\}$ et $\{e_i'\}$ d'un espace vectoriel réel de dimension finie ont même orientation si $\det \operatorname{Mat}_{\{e_i\}} \{e_i'\} > 0$ (dans le cas contraire, on dit qu'elles ont une orientation opposée).

Proposition 2 : L'ensemble $\mathbb{B}$ de toutes les bases de E se partage en deux sous ensembles disjoints non vides : $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \sqcup \mathbb{B}_2$. Toutes les bases de $\mathbb{B}_1$ (resp $\mathbb{B}_2$) ont même orientation. $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ sont dites classes d'orientation.

Définition 3 : On dit que l'on a fixé une orientation de E si l'on a choisi une classe d'orientation. On dira alors que les bases de cette classe sont orientées positivement (ou qu'elles sont directes) et celles de l'autre négativement.

Remarque 4 : Fixer une orientation revient simplement à affecter d'un signe $+$ une classe et d'un signe $-$ l'autre classe.

Exemple 5 : Puisque sur $\mathbb{R}^n$ il y a une base canonique $\{e_i\}$, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une orientation canonique : la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ est orientée positivement si et seulement si $\det \|v_1, \dots, v_n\| > 0$.

B Aires et volumes — Gri 4.10

Théorème 6 : Soient $u, v \in (\mathbb{R}^2)^2$, alors l'aire du parallélogramme engendré par u et v est $\mathcal{A}(u,v) = |\det \|u, v\||$.

Théorème 7 : Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $\operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$ c'est à dire l'ensemble : $\{z \in \mathbb{R}^n,\ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad i \in [\![1,n]\!]\}$.
On a alors $\operatorname{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

C Distances — X.G 5.3

Définition 8 : Soit E un espace euclidien, soient $x_1, \dots, x_m \in E$. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_m$ la matrice $[(x_i \cdot x_j)]_{1 \leq i,j \leq m}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $G(x_1, \dots, x_m)$.

Proposition 9 : La matrice de Gram de m vecteurs $x_1, \dots, x_m$ est définie si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre.

Développement Soit V un sous espace de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_m)$.
Soit $x \in E$, alors $d^2 = d(x, F)^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_m, x)}{G(e_1, \dots, e_m)}$

Théorème 10 (inégalités de Hadamard)
i) Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. Alors $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$
ii) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.
Dans les deux points on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

Application 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx$ admet un minimum μ atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.

D Approche d'isobarycentres

Définition 12 : On appelle isobarycentre de $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ le complexe $\dfrac{z_1 + \dots + z_n}{n}$.

Définition 13 : Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, alors $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ est appelé déterminant circulant des a_i.

Développement
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \text{ où } P = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} X^j$$

Application 14 : Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $P^0 = (z_1, \dots, z_n)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$
$P^{k+1} = \left(\dfrac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \dfrac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$.
Alors $P_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} (g, \dots, g)$ où $g = \operatorname{isobar}(z_1, \dots, z_n)$.

II Classification des isométries du plan et de l'espace.

A Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$ — Rom 22.4

Lemme 15 : Les seules valeurs propres possibles d'une isométrie sont ± 1.

Lemme 16 : Soit $u \in O(E)$. Il existe des sev $P_1, \dots, P_r$ de E de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stable par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$

Proposition 17 : Soit $u \in O(E)$. Si F est un sev de E u stable alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi u stable.

Théorème 18 : Soit $u \in O(E)$ et $n \geq 2$. Il existe une base orthonormée B de E telle que $\mathrm{Mat}_B\, u = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_r \end{pmatrix}$ où $\forall k \in [\![1, r]\!]$ $R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p+q+2r = n$.

B Classification des isométries du plan   Gri 7.10 A.8

On considère E le plan affine euclidien.

Théorème 19 : Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, alors :

- Soit $A \in O_2^+(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotation d'angle θ et de centre 0).
- Soit $A \notin O_2^+(\mathbb{R})$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ Dans ce cas A représente la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.

Corollaire 20 : Soit $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Alors f est formé de :

- l'identité id_E
- les rotations autour d'un point Ω, d'angle $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ que l'on notera $R_{\Omega,\theta}$.
- les réflexions par rapport à une droite D que l'on notera s_D.
- les translations $t_{\vec{v}}$ et les composées de ces applications.

Lemme 21 : Soit $f : E \to E$ une application affine, on note $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in E, f(x) = x\}$

- Si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ alors $|\mathrm{Fix}(f)| = 1$.
- Si 1 est valeur propre de $\vec{f}$ alors : soit $|\mathrm{Fix}(f)| = 0$ soit il existe un point fixe Ω et $\mathrm{Fix}(f) = \Omega + E_1^{\vec{f}}$.

Proposition 22 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\theta}$. En vectorialisant en Ω, $\vec{f} = R_{\Omega,\theta}$ donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ d'où f est une rotation.

Proposition 23 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_D$, alors $\vec{f} = \vec{s_D}$ donc 1 est valeur propre donc :

- si f admet une droite de points fixes alors f est une réflexion par rapport à une droite
- si f n'admet pas de points fixes alors f est un glissement ie la composée d'une réflexion et d'une translation.

Théorème 24 : $\mathrm{Isom}(E)$ est composé de :
i) l'identité
ii) des rotations autour d'un point
iii) des réflexions par rapport à une droite
iv) des glissements
v) des translations.

C Classification des isométries de l'espace   Gri 7.10 A.8

Proposition 25 : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\{e_i\}} f$, $\{e_i\}$ étant la base canonique. Il existe une base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, orthonormée telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\{\varepsilon_i\}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

où $\varepsilon = +1$ si $\det A = 1$ ie $A \in O_3^+(\mathbb{R})$.
et $\varepsilon = -1$ si $\det A = -1$ ie $A \notin O_3^-(\mathbb{R})$.

Corollaire 26 : $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ est formé par :

- l'identité id_E,
- les rotations $R_{D,\theta}$ d'angle $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$, autour d'une droite affine D
- les réflexions par rapport à un plan affine s_P,
- les "rotations-réflexions" $s_P \circ R_{D,\theta}$ où P est un plan orthogonal à D.
- les translations $t_{\vec{v}}$ et les composées de ces applications.

Proposition 27 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{D,\theta}$ alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$ donc :

- si f n'a pas de points fixes, f est un vissage ie une rotation suivie d'une translation
- sinon f est une rotation

Proposition 28 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ s_P$ alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$ donc :

- si f n'admet pas de point fixe, f est un glissement
- sinon f est une réflexion.

Proposition 29 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ (s_P \circ R_D)$ et 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ donc f a un unique point fixe et f est une rotation-réflexion.

Théorème 30 : $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ est composé de :
i) l'identité
ii) des rotations autour d'un axe
iii) des réflexions par rapport à un plan
iv) des rotations réflexions
v) des vissages
iv) des glissements
iv) des translations.

III Formes quadratiques et coniques

A Réduction et signature des formes quadratiques réelles Gri 9.5 Rom 15.7

On considère q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

Définition 31: Une base $\{e_i\}$ de E est dite orthogonale pour φ si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ $\forall i \neq j$. Elle est dite orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Proposition 32: $\{e_i\}$ est une base orthogonale si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\{e_i\}}(q) = \mathrm{diag}(q(e_1), \dots, q(e_n))$.

Remarque 33. Le rang de q est le nombre de $q(e_i) \neq 0$.

Théorème 34 (Gauss) Il existe des bases orthogonales pour q sur E. Autrement dit il existe toujours une base $\{e_i\}$ telle que si $x = \sum x_i e_i$ alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ (avec $a_i \in \mathbb{K}$) où $r = \mathrm{rg}\, q$.

Corollaire 35 (Spectral) Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Théorème 36: Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ est de rang r il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où $s + t = r$

Remarque 37: Ce couple (s,t) est uniquement déterminé par q comme le montre le résultat suivant.

Théorème 38: Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tel que pour toute base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E qui est orthogonale relativement à q, le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ est égal à s et le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$ est égal à t. De plus on a $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

Définition 39: Le couple (s,t) d'entiers naturels défini par le théorème précédent est appelé signature de q et on le note $\mathrm{sgn}(q)$.

B Définition d'une conique à partir d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. Gri A.11.

On considère $q \in Q(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

Définition 40: Une conique C est l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^2$ tels que $q(v) + \varphi(v) = k$.

Remarque 41: Quitte à échanger les signes on peut supposer $\mathrm{sgn}(q) = (2,0), (1,1), (1,0)$.

Proposition 42: Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors dans cette base l'équation de C est $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k$.

Exemple 43: Si $\alpha = \gamma = k = 1$, $\beta = \lambda = \mu = 0$ alors on retrouve l'équation du cercle unité.

Théorème 44: D'après l'orthodiagonalisation simultanée, il existe une base b de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et $\langle , \rangle$, ainsi dans cette base l'équation de la conique est $ax^2 + by^2 - 2rx - 2ry = k$.

Proposition 45: Si q est non dégénérée alors $a, b \neq 0$, donc l'équation de la conique dans une base de $\mathbb{R}^2$ $ax^2 + by^2 = h$ avec $h \in \mathbb{R}$.

Corollaire 46: Dans ce cas si $\mathrm{sgn}(q) = (2,0)$ alors :

- si $h < 0$ alors $C = \emptyset$
- si $h > 0$ alors C est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$
- si $h = 0$ alors $C = \{0\}$.

Corollaire 47: Dans ce cas $\mathrm{sgn}(q) = (1,1)$ alors $ab < 0$:

- si $h = 0$, C se réduit aux deux droites d'équation $y = \pm\sqrt{|a/b|}\, x$.
- si $h \neq 0$, C est une hyperbole.

Proposition 48: Si q est dégénérée alors $ab = 0$ et $\mathrm{sgn}(q) = (1,0)$, alors l'équation de C est de la forme $a(x - \frac{r}{a})^2 - 2sy = h$.

Corollaire 49: Dans ce cas si $s \neq 0$ alors C est une parabole d'équation $y = ax^2$.

Corollaire 50: Dans ce cas si $s = 0$ alors l'équation de C est de la forme $x^2 = \frac{h}{a}$, ainsi :

- si $h < 0$ alors $C = \emptyset$
- si $h = 0$ alors C est la droite d'équation $x = 0$
- si $h > 0$ alors C est l'ensemble des droites d'équation $x = \sqrt{\frac{h}{a}}$ et $x = -\sqrt{\frac{h}{a}}$.

Remarque 51: voir dessins en annexe.

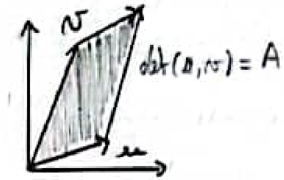
Références :

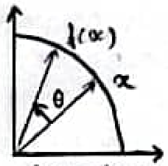
Algèbre linéaire Grifone Gri

Rombaldi Algèbre et géométrie Rom

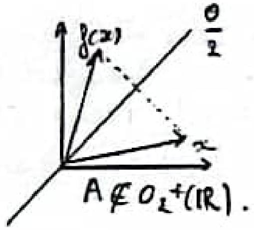
Gourdon Algèbre X.G

Annexe :

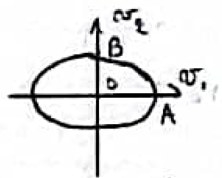




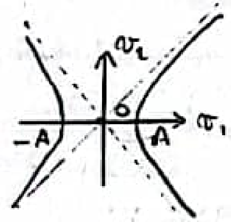
$A \in O_2^+(\mathbb{R})$



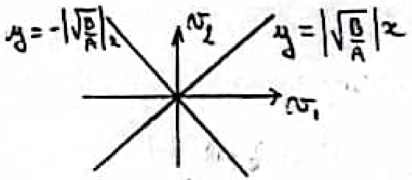
$A \notin O_2^+(\mathbb{R})$.



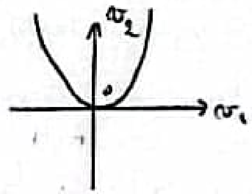
Ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$



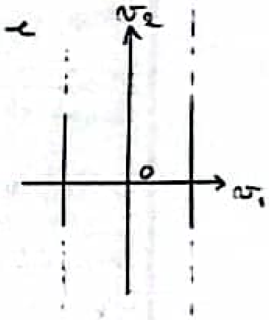
Hyperbole : $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$



$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$



Parabole $y = ax^2$



$x = -h$ $\quad$ $x = h$