181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$ espace affine de direction E (un $\mathbb{R}$ ev), I un ensemble, $\sigma \in \mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_\sigma^{(I)} = \{(x_i) \in \mathbb{R}^I, \ \sum_{i\in I} x_i = \sigma\}$

I Barycentres dans un espace affine

A Notion de barycentre   Tau 1.2   Tau 2.2

Définition 1: On note $M(\mathcal{A}, I)$ l'ensemble des familles $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}\times\mathbb{R}$ telles que $(\lambda_i)_i \in \mathbb{R}^{(I)}$ $(\mathcal{A}\subseteq\mathcal{E})$. On note $M_\sigma(\mathcal{A}, I)$ le sous ensemble de $M(A,I)$ formé des éléments $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $(\lambda_i)_i\in\mathbb{R}_\sigma^{(I)}$.

Proposition 2: Soit $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}\in M_\sigma(\mathcal{E},I)$. Pour tout $m\in\mathcal{E}$ on pose $\vec{v_m} = \sum_{i\in I}\lambda_i \vec{ma_i}$. Alors :

i) Si $\sigma=0$, $\vec{v_m}$ est indépendant de m.

ii) Sinon, $\exists!\, g \in \mathcal{E}$, $\vec{v_g}=\vec 0$ et $\forall p\in\mathcal{E}$, $\vec{pg} = \sigma^{-1}\vec{v_p}$.

Définition 3: Dans ce cas on dit que g est le barycentre de la famille $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}$.

Définition 4: Soient $m\in\mathbb{N}^*$, et $a_1,\dots,a_m\in\mathcal{E}$. On appelle isobarycentre des a_i le barycentre de la famille $(a_i, \frac{1}{m})_{1\le i\le m}$. Lorsque $m=2$, l'isobarycentre de la famille (a_1,a_2) est appelé le milieu de la paire $\{a_1,a_2\}$.

Proposition 5: Soit $(a_i,\lambda_i)\in M_\sigma(\mathcal{E},I)$ de barycentre g. Soit $(I_j)_{1\le j\le m}$ une partition de I. On suppose que pour tout indice j, la somme $\sigma_j=\sum_{I_j}\lambda_i$ est non nulle, et on note g_j le barycentre de la famille $(a_i,\lambda_i)_{i\in I_j}$. Alors g est le barycentre de la famille $(g_j,\sigma_j)_{1\le j\le m}$.

Corollaire 6: Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$, $(I_k)_{1\le k\le m}$ une partition de I et $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{R}$ de somme égale à 1. Pour $k\in[\![1,m]\!]$, soit $(\lambda_i)_{i\in I_k}$ un élément de $\mathbb{R}_1^{(I_k)}$. On note g_k le barycentre de la famille $(a_i,\lambda_i)_{i\in I_k}$ et g le barycentre de la famille $(g_k,\alpha_k)_{1\le k\le m}$. Alors g est le barycentre de la famille $(a_i, \alpha_k\lambda_i)_{i\in I}$.

Proposition 7: Pour $i\in I$, posons $\theta_i = \sigma^{-1}\lambda_i$. Si $p\in\mathcal{E}$, il vient :
$\vec{pg} = \sum_{i\in I}\theta_i\vec{pa_i}$

Proposition 8: Réciproquement si $q\in\mathcal{E}$, $\vec{qg}=\sum_{i\in I}\theta_i \vec{qa_i}$

B Caractérisation et application aux polygônes   Tau 1.4   Iren   Tau 2.3

Théorème 9: Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

Lemme 10: Si $p,q\in\mathcal{E}$, l'ensemble des barycentres de $\{p,q\}$ est $p+\mathbb{R}\vec{pq}$.

Définition 11: Soit $\emptyset\neq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{E}$. On appelle sous espace affine engendré par $\mathcal{A}$ le plus petit sous ensemble de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$. On le note $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

Proposition 12: Soit $\emptyset\neq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{E}$. Alors $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres des éléments de $\mathcal{A}$. La direction de $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est $\mathrm{Vect}(\mathcal{A}-a)$ où a est un point quelconque de $\mathcal{A}$.

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit $(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{C}^m$, alors $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_m & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ \vdots & & & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$ $= \prod_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}\,\omega^{ki}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

Application 13: Soit P le polygône du plan complexe de sommets $z_1,\dots,z_m\in\mathbb{C}^m$. Soit $P_0=P$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k. Alors (P_k) converge vers $(g,\dots,g)$ où $g=\mathrm{isobar}(P)$.

C Coordonnées barycentriques   Tau 1.10   Aud 5.2   Tau 2.8

Théorème 14: Soit $a=(a_i)_{i\in I}$ une base affine de $\mathcal{E}$. Tout point $m\in\mathcal{E}$ est barycentre d'une famille $(a_i,\lambda_i)_i\in M(\mathcal{E},I)$. La famille $(\lambda_i)_i\in\mathbb{R}^{(I)}$ est unique à un facteur multiplicatif près. Elle est unique si l'on impose la condition $(\lambda_i)_i\in\mathbb{R}_1^{(I)}$. On dit que $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de coordonnées barycentriques de m dans la base affine a.

Proposition 15: Soit ABC un triangle de $\mathcal{E}$ et $H\in ABC$. Alors les coordonnées barycentriques de H dans le repère affine (A,B,C) du triangle sont $(\mathrm{Aire}(HBC), \mathrm{Aire}(HCA), \mathrm{Aire}(HAB))$ autrement dit $A(HBC)\vec{HA}+A(HCA)\vec{HB}+A(HAB)\vec{HC}=0$

Corollaire 16. Soit G le centre de gravité du triangle ABC, alors on a $\text{Aire}(GBC) = \text{Aire}(GCA) = \text{Aire}(GAB)$.

II Convexité dans un espace affine

A Notion de convexité Tau 1.3 Tau 4.2

On suppose par la suite $\mathcal{E}$ de plus euclidien.

Définition 17 : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$.
i) On appelle combinaison convexe de points de $\mathcal{A}$ tout barycentre d'une famille $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}$, où I est un ensemble et où $(a_i,\lambda_i)_{i\in I} \in M_1^+(\mathcal{A},I)$.
ii) On dit que $p \in \mathcal{E}$ est barycentre de points de $\mathcal{A}$ s'il existe un ensemble I, $\sigma \in \mathbb{R}^*$ et une famille $(a_i,\lambda_i)_i \in M_\sigma(\mathcal{A},I)$ dont p est le barycentre.

Exemple 18. Soient $a,b \in \mathcal{E}$. Le segment $[a,b]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de (a,b)

Définition 19 : On dit que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ est étoilé en un de ses points $M \in \mathcal{A}$ si $\forall N \in \mathcal{A}$, $[M,N] \subseteq \mathcal{A}$.
On dit que $\mathcal{A}$ est convexe s'il est étoilé en tous ses points.

Exemple 20 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Proposition 21 : Pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$, on a équivalence entre :
i) Pour tous $a,b \in \mathcal{A}$, $[a,b] \subset \mathcal{A}$.
ii) Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}^*_+$, tout ensemble I et tout $(a_i,\lambda_i)_{i\in I} \in M_\sigma(\mathcal{A},I)_+$ le barycentre de la famille $(a_i,\lambda_i)_{i\in I}$ est dans $\mathcal{A}$.
iii) Toute combinaison convexe de points de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition 22 : Soient $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ l'intersection des $\mathcal{A}_i$ pour $i \in I$. Alors $\mathcal{A}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Proposition 23 : L'image et l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

B Enveloppe convexe Tau 1.3 Fra Tau 4.3
2.12

Définition 24 : Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$ et C l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$. D'après la proposition 22, C est un convexe. C'est clairement le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$. On dit que C est l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ et on note $C = \text{Co}(\mathcal{A})$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (théorème de Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Application 25 : Le plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1 est $n = 7$.

Proposition 26 : Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{E}$, $\text{Co}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{A}$.

Exemple 27 : Si $a,b \in \mathcal{E}$, on a $\text{Co}(\{a,b\}) = [a,b]$.

Proposition 28 : Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$.
i) L'intersection des convexes fermés de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$ est $\overline{\text{Co}(\mathcal{A})}$
ii) Si $\mathcal{A}$ est convexe et compacte, on a $\mathcal{A} = \text{Co}[\text{Fr}(A)]$

Proposition 29 : Si $\mathcal{A}$ est ouvert, $\text{Co}(\mathcal{A})$ l'est aussi.

Remarque 30 : Soit $\mathcal{A} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ ; xy \geq 1\}$. On obtient $\text{Co}(\mathcal{A}) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}_+\}$. On en déduit que l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermé.

Théorème 31 (Carathéodory) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$. Tout élément de $\text{Co}(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$, avec $k \leq 1 + \dim \mathcal{E}$.

Définition 32 : Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$, on pose :
$$\delta(\mathcal{A}) = \sup\{d(a,b) ; a,b \in \mathcal{A}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
et on dit que $\delta(\mathcal{A})$ est le diamètre de $\mathcal{A}$, est dite bornée si $\delta(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 33 : Soit $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Alors :
i) Si $\mathcal{A}$ est compacte, il en est de même pour $\text{Co}(\mathcal{A})$
ii) Si $\mathcal{A}$ est bornée, $\text{Co}(\mathcal{A})$ l'est aussi et $\delta(\mathcal{A}) = \delta[\text{Co}(\mathcal{A})]$.

C Points extrémaux d'un convexe Tau 4.8

Soit par la suite $\mathcal{A} \subseteq E$ convexe

Définition 34 : Soit $M \in \mathcal{A}$, alors on dit que M est un point extrémal de $\mathcal{A}$ si $\forall t \in [0,1]$, $\forall P, Q \in \mathcal{A}$, $M = (1-t)P + tQ \Rightarrow M \in \{P, Q\}$ et on note $Extr(\mathcal{A})$ leur ensemble.

Exemple 35 : Soit $O \in E$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$ alors $Extr(B(O,r)) = S(O,r)$

Proposition 36 : Soit $M \in \mathcal{A}$, alors on a équivalence entre :
- $M \in Extr(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A} \setminus \{M\}$ est convexe
- Si M est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{A}$ alors M est égal à l'un de ces éléments

Théorème 37 (Krein-Milman) Si A est compact alors $\mathcal{A} = Co(Extr(\mathcal{A}))$.

III Fonctions convexes d'une variable réelle. J'int 3.2

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 38 : On dit que f est convexe sur I si :
$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.
La fonction f est concave si $-f$ est convexe.

Exemple 39 : i) Toute fonction affine est convexe
ii) La fonction valeur absolue est convexe
iii) $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
iv) $g : x \mapsto x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 40 : Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Alors $f+g$ est une fonction convexe sur I.

Remarque 41 : fg n'est pas forcément convexe. Par exemple pour $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$.

Définition 42 : L'épigraphe de f est $E_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et } f(x) \leq y\}$

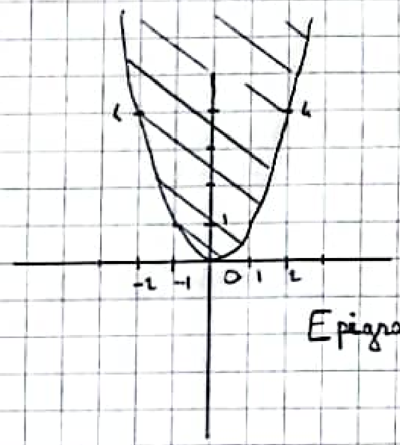
Proposition 43 : La fonction f est convexe ssi son épigraphe est une partie convexe du plan ie ssi $\forall (M_1, M_2) \in E_f^2$, $[M_1, M_2] \subset E_f$.

Proposition 44 : Etant donné une fonction convexe f et une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ de réels positifs de somme égale à 1 on a :
$\forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p$, $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

Références

- Tauvel Cours de géométrie Tau
- Tauvel Géométrie Tau (alternative au premier Tauvel)
- M. Audin Géométrie Aud
- Francinou Oraux X-ENS 1 (p 284 dvlpt 2)
- Isenmann (dvlpt 1).
- J'intègre MP-MP* J'int.

Annexe :



Épigraphe de la fonction carré.