162

Système d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

I Mise en place du problème

A Systèmes d'équations linéaires. Gri 5.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps

<u>Définition 1</u> : Un système linéaire de p équations en m inconnues est de la forme $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pm}x_m = b_m \end{cases}$ où les a_{ij} et $b_{ij} \in \mathbb{K}$

On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

<u>Proposition 2</u> : Le système précédent peut s'écrire matriciellement $AX = B$ avec $A \in M_{p,m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ d'inconnue $X \in M_{m,1}(\mathbb{K})$.

<u>Proposition 3</u> : Le système précédent peut s'écrire vectoriellement $x_1C_1 + \dots + x_mC_m = b$ où $C_j \in \mathbb{K}^p$, $b \in \mathbb{K}^p$ et d'inconnues $x_i \in \mathbb{K}$.

Exemple 4 : le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 4z = -1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ et vectoriellement $$x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B Systèmes de Cramer et cas triangulaire Gri 5.2 Rom 5.1 5.3 (5.4 5.5)

Soit $A \in GL_m(\mathbb{K})$, $m \in \mathbb{N}^*$.

<u>Définition 5</u> : On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

<u>Théorème 6</u> : Un système de Cramer $AX = B$ admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

<u>Théorème 7</u> : Un système de Cramer $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$ (avec $A = (a_{ij}) = \|C_1, \dots, C_m\|$, $\det A \neq 0$) admet toujours une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det \| C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_m \|}{\det A}$$

Exemple 8 Le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ est de Cramer et la solution est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 9 : Cette méthode comporte environ $m^2 m!$ opérations élémentaires à effectuer : c'est trop

<u>Proposition 10</u> : Si A est triangulaire supérieure alors la résolution de $Ax = b$ se fait en remontant : $x_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$ et $x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}}$ $\forall i \in [\![1, m-1]\!]$

Remarque 11 : Pour un système triangulaire inférieur, on procède de même "en descendant".

II Méthode du pivot de Gauss

A Opérations élémentaires. Rom 5.4.

<u>Définition 12</u> : On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq m$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme : $D_i(\lambda) = I_m + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
On appelle matrice élémentaire une matrice de dilatation ou de transvection.

<u>Lemme 13</u> : Une matrice élémentaire est inversible et : $T_{ij}^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

<u>Définition 14</u> : On appelle matrice déduite de A par opération élémentaire sur les lignes de A toute matrice de la forme $A_i(\lambda) = {}^t(L_1 \dots L_{i-1}\ \lambda L_i\ L_{i+1} \dots L_m)$ avec $i \in [\![1, m]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ou de la forme $A_{ij} = {}^t(L_1 \dots L_{i-1}\ L_i + \lambda L_j\ L_{i+1} \dots L_m)$ $1 \leq i \neq j \leq m$ $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Remarque 15 : On peut définir de même les matrices déduite de A par opération élémentaire sur les colonnes $A_i'(\lambda)$ et $A'_{ij}(\lambda)$.

<u>Lemme 16</u> : avec les notations qui précèdent :
$A_i(\lambda) = D_i(\lambda)A$, $A_{ij}(\lambda) = T_{ij}(\lambda)A$,
$A_j'(\lambda) = AD_j(\lambda)$, $A'_{ij}(\lambda) = AT_{ij}(\lambda)$.

<u>Corollaire 17</u> : Pour permuter les lignes i et j où $1 \leq i < j \leq m$ on effectue les produits $D_j(-1)T_{ij}(-1)T_{ji}(-1)T_{ij}(-1)A$ et pour permuter deux colonnes on effectue les produits $AT_{ij}(-1)T_{ji}(-1)T_{ij}(-1)D_i(-1)$.

Remarque 18 : Les matrices élémentaires associées à ces opérations sont $P_{ij} = I_m - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$ et ${}^tP_{ij} = P_{ji}$

<u>Théorème 19</u> : Soit $A \in GL_m(\mathbb{K})$ alors il existe des matrices de transvection $P_1, \dots, P_r$ et $Q_1, \dots, Q_s$ telles que : $A = P_1 \dots P_r D_m(\det(A)) Q_1 \dots Q_s$.

<u>Corollaire 20</u> : $GL_m^+(\mathbb{R})$ et $GL_m^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et ce sont les composantes connexes de $GL_m(\mathbb{R})$.

B Résolution du système Rom 5.5 Gri exo 5.1

Soit $(A, b) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$.

<u>Proposition 21</u>: On peut transformer $Ax = b$ en $Rx = c$ avec R triangulaire supérieure avec des opérations élémentaires sur les lignes. En particulier $\det(A) = \det(R) = \pm \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$. Voici les étapes de la méthode :

- On se ramène à un système tel que $a_{11} \neq 0$. (permutation de lignes).
- Elimination de x_1 dans les équations $2, \dots, n$ en effectuant :
  $L_i^{(1)} \mapsto L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \quad i \in [\![2, n]\!]$
- On se ramène à un système tel que $a_{22} \neq 0$ ...
- etc ...

De plus on a $\det(A) = (-1)^p \det(A^{(n)})$, où p est le nombre de permutations qui ont été nécessaires pour avoir des pivots mon nuls et $\det(A^{(n)})$ est le produit des pivots.

Remarque 22 : Pour éviter de faire une division par un nombre trop petit on permute les lignes de manière à avoir le plus grand pivot possible en valeur absolue.

Remarque 23 : Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$.

Exemple 24 : La solution de $\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

est $x = \frac{8a + 5b - c}{18}$ $y = \frac{-2a + b + 7c}{18}$ $z = \frac{-4a - 7b + 5c}{18}$

C Applications aux familles libres et génératrices Gri 2.3

<u>Proposition 25</u> : Soient $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, alors la méthode du pivot de Gauss permet de déterminer si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Exemple 26 : Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alors la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

<u>Proposition 27</u> : Soient $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, alors la méthode du pivot de Gauss permet de savoir s'il existe des relation liant la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$

Exemple 28 : Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

alors $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ et $3v_1 + 2v_2 - v_4 = 0$.

<u>Proposition 29</u>, On peut vérifier qu'un vecteur appartient à l'espace engendré par $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ et déterminer, le cas échéant son expression en fonction de $v_1, \dots, v_n$ (toujours à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).

Remarque 30 : On peut également déterminer si une famille est génératrice, une base d'une intersection de sous espaces et les équations d'un sous espace.

III Autres méthodes de résolution.

A Décompositions LU et Cholesky Cia 4.3 4.4

Développement (décomposition LU) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{K}) \quad \forall k \in [\![1, n]\!]$.

Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

De plus une telle factorisation est unique.

Remarque 31 : Un cas important où les conditions d'application du théorème précédent se trouve vérifiées est celui où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 32 : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, résoudre $Av = b$ revient à résoudre $Lw = b$ puis $Uv = w$.

Développement (décomposition de Cholesky). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = B{}^tB$. De plus on peut imposer que les éléments diagonaux de B soient tous > 0 et la factorisation $A = B{}^tB$ correspondante est alors unique.

Exemple 33 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Application 34 : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors résoudre $Au = b$ revient à résoudre $Bw = b$ puis ${}^tB u = w$ où $A = B{}^tB$.

Remarque 35 : le nombre d'opérations est en $O(n^3)$.

B Minimisaton de la fonctionnelle quadratique Rom 5.15

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

<u>Théorème 35</u> : Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, φ une fonction définie sur O à valeurs dans $\mathbb{R}$ et différentiable en $x_0 \in O$. Si φ admet un extremum local en x_0 alors $d\varphi(x_0) = 0$.

<u>Définition 36</u> : On appelle fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute fonction φ définie sur $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax | x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Lemme 37. La fonctionnelle quadratique φ associée à la matrice A et au vecteur b est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ d\varphi(x) = \nabla \varphi(x) = Ax - b.$$

Théorème 38. La solution u du système linéaire $Ax = b$ est le vecteur qui réalise le minimum global de la fonctionnelle quadratique φ.

Lemme 39 : On note $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle Ax, x \rangle \geqslant \lambda_1 \|x\|_2^2$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (Méthode de gradient à pas optimal) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \underset{\rho \in \mathbb{R}^{+*}}{\operatorname{argmin}} \left(f(x_n - \rho \nabla f(x_n)) \right)$, alors $x_n \to x_*$ où $x_* \in \mathbb{R}^p$ est l'unique minimum global de f.

C Méthode des moindres carrés Gri exo 7.23 [FACULTATIF]

Soient E et F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 40 : Il existe une unique $f^* \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $\forall (x,y) \in E \times F$ $\langle f(x), y \rangle_E = \langle x, f^*(y) \rangle_F$.

Lemme 41 : Si $q = \dim E \leqslant \dim F = m$ et que f est injective alors $\det(f^* \circ f) \neq 0$

Proposition 42 : Soit $p : F \to F$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$, alors $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$.

Définition 43 : $f^- = (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$ est appelée l'inverse généralisée de f.

Remarque 44 : $f^- \circ f = id_E$, $f \circ f^- = p$ et si f est bijective alors $f^- = f^{-1}$.

Définition 45 : Soit le système linéaire $f(x) = b$ avec f injective. On appelle solution des moindres carrés le vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - b\| = \inf_{x \in E} \|f(x) - b\|$.

Théorème 46 : La solution des moindres carrés de $f(x) = b$ est donnée par $x_0 = f^-(b)$

Exemple 47 : L'inverse généralisé de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 19 & 15 & -1 \\ 2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$

Exemple 48 : La solution des moindres carrés de $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ est donnée par $x_0 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 48 - a \\ -22 + 14a \end{pmatrix}$

Remarque 49. On retrouve la solution de $Ax = b$ si le système est compatible. Dans l'exemple précédent, si $a = -2$.

D Méthodes itératives Cia 5.3

Définition 50 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière tout couple $(M,N) \in GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$
Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière (M,N) est :
$u_0 \in \mathbb{K}^n$ et $u_{k+1} = M^{-1} N u_k + M^{-1} b$ $\forall k \geqslant 0$.
On dit que la méthode itérative converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{K}^n$ on a $u_m \to u$ avec $Au = b$

Théorème 51 : Une méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$. (rayon spectral).

Théorème 52 : Soit $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ et (M,N) une décomposition régulière de A. Si la matrice $(M^* + N)$ est définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Références :

Algèbre linéaire Joseph Grifone Gri

Rombaldi Analyse matricielle Rom

P. Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation Cia.