161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

I Espaces affines euclidiens. Notion de distance.

A Applications affines. Généralités   Aud I.3

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des espaces affines dirigés par E et F (respectivement) des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 1 : Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe un point $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $f : E \to F$ tels que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

On dit que f est la partie linéaire de φ et on note $f := \vec{\varphi}$.

Remarque 2 : Les applications affines sont le pendant en géométrie affine des applications linéaires en algèbre linéaire.

Exemple 3 : L'application constante envoyant $\mathcal{E}$ sur un point est affine, l'application linéaire associée est l'application nulle.

Proposition 4 : Soit $\mathcal{H}$ un espace affine dirigé par H. La composée $\psi \circ \varphi$ de deux applications affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ est une application affine. L'application linéaire associée est la composée des applications linéaires associées (en formules $\vec{\psi} \circ \vec{\varphi} = \overrightarrow{\psi \circ \varphi}$.)
Une application affine φ est bijective si et seulement l'application linéaire associée l'est. Alors φ^{-1} est affine et $\overrightarrow{\varphi^{-1}} = \vec{\varphi}^{-1}$.

Corollaire 5 : Les bijections affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même forment un groupe : le groupe affine noté $GA(\mathcal{E})$.

Proposition 6 : L'application du groupe affine dans le groupe linéaire, $GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$, $\varphi \longmapsto \vec{\varphi}$ est un homomorphisme surjectif de groupes dont le noyau est le groupe des translations de $\mathcal{E}$, isomorphe au groupe additif de l'espace vectoriel E.

Lemme 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tous points $O \in \mathcal{E}$, $O' \in \mathcal{F}$, il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $\varphi(O) = O'$ et $\vec{\varphi} = f$.

Corollaire 8 : Étant donné $O \in \mathcal{E}$, toute application affine φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme $\varphi = t_u \circ \psi$ où t_u est une translation de vecteur $u \in E$ et ψ fixe O.

B Isométries affines   Aud 2.1 2.2

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces euclidiens.

Définition 9 : Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien. On définit la distance entre deux points A et B par $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

Désormais $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des espaces affines euclidiens dirigés respectivement par E et par F

Définition 10 : Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme ie $\|f(u)\|_F = \|u\|_E$ pour tout $u \in E$.
De même une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une isométrie affine si et seulement si $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A,B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.
On appelle $O(E)$ (resp $Isom(\mathcal{E})$) l'ensemble des isométries de E dans E (resp de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$).

Exemple 11 :
- Les translations sont des isométries affines.
- Les homothéties sont des isométries affines si et seulement si elles sont de rapport ± 1.
- Les symétries orthogonales sont des isométries.

Théorème 12 : Les ensembles $O(E)$, $Isom(\mathcal{E})$ munis de la composition des applications sont des groupes.
Si φ est une isométrie vectorielle, $\det \varphi = \pm 1$.

Théorème 13 : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ alors $f \in Isom(\mathcal{E}) \Leftrightarrow f \in Aff(\mathcal{E})$ et $\vec{f} \in O(E)$

C Distance. Matrices et déterminants de Gram   X-G 5.3 + exos.

E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 14 : Soient $(x_1, \dots, x_n)$ n vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $[(x_i \cdot x_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 15 : Toute matrice de Gram est hermitienne positive. Réciproquement toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram.
De plus, la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est définie si et seulement si la

Développement : Soit $V \subset E$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_m)$. Soit $x \in E$. Alors la distance d de x à V ($d = \inf_{y \in V} \|x - y\|$) vérifie :

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_m, x)}{G(e_1, \dots, e_m)}$$

Théorème 16 (Inégalités de Hadamard) :
i) Soient $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1, \dots, x_m) \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|^2$
ii) Soient $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Alors $|\det(x_1, \dots, x_m)| \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme standard sur $\mathbb{R}^m$.
Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

Application 17 : Soit $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(a_1, \dots, a_m) = \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_m x^m)^2 dx$. Alors φ admet un unique minimum $\mu = \frac{1}{(m+1)^2} \in \mathbb{R}$.

II Etude du groupe orthogonal.

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, muni de son produit scalaire usuel.

A Générateurs et réduction Per 6.1, 6.2 Rom 22.3 22.4

Définition 18 : On note $O_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_m(\mathbb{R}),\ {}^tAA = I_m\}$ l'ensemble des matrices orthogonales et $O_m^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_m(\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$

Proposition 19 : Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$. $A \in O_m(\mathbb{R})$ si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé transforme toute base orthonormée de $\mathbb{R}^m$ en bon de $\mathbb{R}^m$.

Théorème 20 : i) Le centre de $O_m(\mathbb{R})$ est $Z = \{I_m, -I_m\}$. En particulier pour $m \geq 2$ $O_m(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.
ii) Pour $m \geq 3$, le centre de $O_m^+(\mathbb{R})$ est $Z \cap O_m^+(\mathbb{R})$ i.e. $\{I_m\}$ si m est impair et $\{-I_m, I_m\}$ si m est pair.

Développement : Le groupe $O_m(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément si $A \in O_m(\mathbb{R})$ alors A est produit d'au moins m réflexions

Lemme 21 : Soit $m \geq 3$ et soient τ_1, τ_2 des réflexions, il existe des renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 22 : Pour $m \geq 3$, $O_m^+(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements ; précisément tout élément $A \in O_m^+(\mathbb{R})$ est produit d'au plus m renversements

Lemme 23 : Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont ± 1.

Théorème 24 : Soit $u \in O(E)$, $m \geq 2$. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit : $D = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ $R_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$
avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p + q + 2r = m$.

B Topologie Rom 22.3 22.5

Théorème 25 : $O_m(\mathbb{R})$ est compact dans $M_m(\mathbb{R})$.

Théorème 26 : $O^+(E)$ (resp $O_m^+(\mathbb{R})$) est un sous-groupe distingué de $O(E)$ (resp de $O_m(\mathbb{R})$) d'indice 2.

Corollaire 27 : Les composantes connexes de $O(E)$ sont $O^+(E)$ et $O^-(E)$.

Théorème 28 : L'application $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $O_m(\mathbb{R}) \times S_m^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_m(\mathbb{R})$.

III Classification des isométries

A Classification des isométries du plan. Gri 7.10 A.8

On considère $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien

Théorème 29 : Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, alors : [Annexe]
i) Soit $A \in O_2^+(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (rotation d'angle θ et de centre O.)
ii) Soit $A \notin O_2^+(\mathbb{R})$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (Dans ce cas A représente la matrice orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.

Corollaire 30 : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^2)$. Alors f est forme par :
- l'identité $id_{\mathcal{E}}$
- les rotations autour d'un point Ω d'angle $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$
- les réflexions par rapport à une droite D.
- les translations $t_{\vec{u}}$
-

Lemme 31 : Soit $f : E \to E$ une application affine et notons $Fix f = \{x \in E, f(x) = x\}$
- Soit 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, alors f admet un unique point fixe
- Soit 1 est valeur propre et $Fix(f) = \emptyset$
- Soit 1 est valeur propre et il existe un point fixe Ω et $Fix(f) = \Omega + E_1(\vec{f})$ où $E_1(\vec{f})$ est l'espace propre correspondant à la valeur propre 1 de $\vec{f}$.

Proposition 32 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\theta}$. En vectorialisant en Ω, $\vec{f} = R_{\Omega,\theta}$ donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ d'où f est une rotation.

Proposition 33 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ S_D$, alors $\vec{f} = S_{\vec{D}}$ donc 1 est valeur propre de $\vec{f}$ donc
- si f admet une droite de points fixes alors f est une réflexion par rapport à une droite
- si f n'admet pas de points fixes alors f est un glissement ie la composée d'une translation et d'une réflexion.

Théorème 34 : $Isom(E)$ est composé de :
- l'identité
- les rotations autour d'un point
- des réflexions par rapport à une droite
- les glissements
- des translations

B Classification des isométries de l'espace. Gri 7.10 A.8

Proposition 35 : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e_i}$, $\{e_i\}$ étant la base canonique. Il existe une base orthonormée $\{e_1', e_2', e_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$A' = Mat_{e_i'}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\det A = 1$, c'est à dire si $A \in O_3^+(\mathbb{R})$
et $\varepsilon = -1$ si $\det A = -1$, c'est à dire si $A \notin O_3^+(\mathbb{R})$.

Corollaire 36 : Soit $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$. Alors f est formée par :
- l'identité id_E
- les rotations $R_{D,\theta}$, $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ autour d'une droite affine D.
- les "rotations-réflexions" $S_P \circ R_{D,\theta}$ où P est un plan orthogonal à D.
- les translations $t_{\vec{v}}$.

et les composées de ces applications.

Proposition 37 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ R_{D,\theta}$, alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$ donc :
- si f n'a pas de points fixes alors f est un vissage ie rotation suivie d'une translation
- si f admet un point fixe alors f est une rotation.

Proposition 38 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ S_P$ alors 1 est valeur propre de $\vec{f}$ donc :
- si f n'admet pas de point fixe, f est un glissement
- sinon f est une réflexion.

Proposition 39 : Soit $f = t_{\vec{v}} \circ (S_P \circ R_D)$, alors 1 n'est pas valeur propre donc f admet un unique point fixe d'où f est une rotation réflexion.

Théorème 40 : $Isom(\mathbb{R}^3)$ est composée de :
- l'identité
- des rotations autour d'un axe
- des réflexions par rapport à un plan
- des rotations réflexions
- des vissages
- des glissements
- les translations.

Scanné avec CamScanner

Références :

H. Audin Géométrie Aud

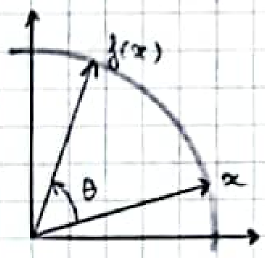
Rombaldi Mathématiques pour l'agrégation Rom

Daniel Perrin Cours d'Algèbre Per

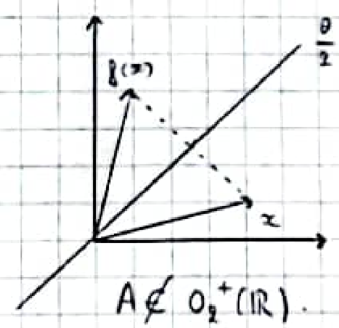
Joseph Grifone Algèbre Linéaire Gri

Xavier Gourdon Algèbre X.G

Annexe :



$A \in O_2^+(\mathbb{R})$



$A \notin O_2^+(\mathbb{R})$.