158 : Matrices symétriques réelles, matrice hermitiennes.

I Algèbres linéaire et bilinéaire

A Matrices symétriques réelles et hermitiennes   Gri 8.3 + exo 1.13

Définition 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A est symétrique (respectivement anti-symétrique) si ${}^tA = A$ (respectivement ${}^tA = -A$). On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp $A_n(\mathbb{R})$) leur ensemble.

Exemple 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique

Proposition 3 : $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension respective $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$

Corollaire 4 : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Exemple 5 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Définition 6 : Une matrice $H \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si ${}^t\overline{H} = H$. On note $H_n(\mathbb{C})$ leur espace vectoriel.

Exemple 7 : Les matrices symétriques réelles sont hermitiennes.

Remarque 8 : Les éléments de la diagonale d'une matrice hermitienne sont des réels.

B Endomorphismes symétriques et hermitiens.   Gri 7.8 7.13 8.5 8.7

On considère E_r et E_c des espaces euclidien et hermitien.

Proposition 9 : Soit $f \in End(E_r)$. Il existe un unique $f^* \in End(E_r)$ tel que :
$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E_r$$

Définition 10 : Dans ce cas f^* est appelé l'adjoint de f, et si $f = f^*$ alors on dit que f est auto-adjoint ou symétrique. On note $S(E_r)$ leur espace vectoriel.

Exemple 11 : id est un endomorphisme symétrique

Remarque 12 : Soit $f \in End(E_r)$, e une base orthonormée de E_r et $A = Mat_e(f)$ alors ${}^tA = Mat(f^*)$.

Proposition 13 : Soit $f \in End(E_r)$, alors f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique

Théorème 14 : Soit $f \in End(E_c)$. Il existe un unique $f^* \in End(E_c)$ tel que :
$$\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E_c$$

Définition 15 : Dans ce cas f^* est dit l'adjoint de f, et si $f = f^*$ alors on dit que f est auto-adjoint ou hermitien, on note $H(E_c)$ leur espace vectoriel.

Proposition 16 : Soit $f \in End(E_c)$. Alors f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est hermitienne.

C Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes   Gri 9.1 9.2

Définition 17 : Une forme bilinéaire sur un ev E sur $\mathbb{K}$ est une application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à ses deux variables.
Si $\{e_i\}$ est une base de E, on note $Mat(b)_{e_i} = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$
On dit qu'une forme bilinéaire s sur E est symétrique si $\forall x, y \in E$, $s(x,y) = s(y,x)$.

Proposition 18 : Si E est de dimension finie, une forme bilinéaire s est symétrique si et seulement si la matrice de s (dans une base quelconque) est symétrique.

Théorème 19 : Soit s une forme bilinéaire symétrique. Alors
i) $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto s(x,x)$ est une forme quadratique.
ii) Réciproquement, à toute forme quadratique q est associé une unique forme bilinéaire symétrique s telle que $s(x,x) = q(x)$ $\forall x \in E$.

Exemple 20 : si $s(x,y) \overset{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}{=} x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 5x_1y_3 - 5x_3x_1 + 3x_3y_2 + 3x_2y_3$
on a $q(x) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Définition 21 : Soit φ une forme sesqui-linéaire sur E_c alors on dit que φ est hermitienne si $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$

Proposition 22 : Soit φ une forme sesqui-linéaire sur E_c, alors φ est hermitienne si et seulement si la matrice de φ (dans une base orthonormée) est hermitienne.

II Réduction et décomposition

A Signature et réduction d'une forme quadratique   Rom Gri

Théorème 23 : (Réduction de Gauss) Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe $r \in [\![1, n]\!]$, des scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ et des formes linéaires $(l_i)_{1\leq i\leq r}$ indépendantes dans l'espace dual E^* tels que : $\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i l_i^2(x)$

Corollaire 24 : Avec les notations qui précèdent, il existe une base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r} \neq 0$ et $\lambda_i = 0$ $\forall i \geq p+1$.

Corollaire 25 : Si A est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale

Théorème 26 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ est de rang r, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $s+t=r$, $s,t \in \mathbb{N}^2$

Définition 27 : Le couple (s,t) est appelé signature de q.

Remarque 28 : Une forme quadratique non nulle est donc positive (resp définie positive) si sa signature est $(s,0)$ [resp $(n,0)$] où $s \in [\![1, n]\!]$. En regroupant s, on voit à l'aide la forme de somme des carrés (Théorème 23) et en comptant les + et les -

Exemple 29 : Si $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ alors sign$(3,0)$

B Théorème spectral Gri 7.13 8.7 Rom

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit $f \in S(E)$, alors :

i) f est diagonalisable

ii) Les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. En particulier on peut construire une base orthonormée de vecteurs propres en choisissant une base orthonormée dans chaque espace propre.

Théorème 30 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les espaces propres sont deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.)

Théorème 31 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A' = {}^tPAP$ soit diagonale

Remarques 32 : 30 et 31 sont des reformulation du développement.
Le résultat devient faux dans $S_n(\mathbb{C})$. (Exemple à calculer dans le devlpt.)

Théorème 33 : Soit $f \in H(E_c)$. Alors :
i) Les valeurs propres de f sont toutes réelles.
ii) f est diagonalisable
iii) les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux donc f est orthodiagonalisable.

Corollaire 34 : Soit $A \in H_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice U unitaire telle que la matrice $A' = {}^t\bar{U}AU$ soit diagonale réelle (unitaire : $UU^* = U^*U = I_n$ où $U^* = {}^t\bar{U}$)

Théorème 35 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E (I ayant au moins 2 éléments). Il existe une base orthonormée de diagonalisation commune dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ ssi les u_i commutent deux à deux.

Corollaire 36 : Soit $\{A_i \mid i \in I\} \in S_n(\mathbb{R})$ où $|I| \geq 2$. Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si et seulement si les A_i commutent deux à deux.

C Décomposition polaire Rom Fra

Définition 37 : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp définie positive) si elle est symétrique avec $(x|Ax) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (resp $(x|Ax) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) ces ensembles.

Théorème 38 : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists! B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Théorème 39 (décomposition polaire) Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Corollaire 40 : L'application $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 41 : L'exponentielle $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

III Application à la résolution de systèmes linéaires

A Décomposition LU et Cholesky Cia 4.3

Soit $(A,b) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$. On souhaite résoudre $Ax = b$

Développement (décomposition LU)
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre m telle que les m sous matrices diagonales $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ $1 \leq k \leq m$ soient inversibles.
Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1$ $\forall i \in [\![1, m]\!]$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. De plus, une telle décomposition est unique.

Remarque 42 : Un cas important où les conditions d'application du théorème précédent se trouvent vérifiées est celui où $A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$.

Exemple 43 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 17 \\ 3 & 20 & 41 \end{pmatrix}$

Application 44 : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$ avec $A = LU$

Développement (décomposition de Cholesky). Soit $A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = B{}^tB$.
De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de B soient tous > 0 et la factorisation $A = B{}^tB$ correspondante est alors unique.

Application 45 : Si $A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$ alors résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $By = b$ puis ${}^tBx = y$ où $A = B{}^tB$

Remarque 46. Le nombre d'opérations est en $O(m^3)$.

B Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires Cia 5.3

Définition 47 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On appelle décomposition régulière tout couple $(M, N) \in GL_m(\mathbb{K}) \times M_m(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$
Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière (M, N) est :
$u_0 \in \mathbb{K}^m$ et $u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$ $\forall k \geq 0$.
On dit que la méthode itérative converge si $\forall u_0 \in \mathbb{K}^m$, $u_m \to u$ avec $Au = b$.

Théorème 48. Une méthode itérative converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ (le rayon spectral).

Théorème 49 : Soit $A \in H_m^{++}(\mathbb{C})$ et (M, N) une décomposition régulière de A.
Si la matrice $(M^* + N)$ est définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Scanné avec CamScanner

Références :

Rombaldi Mathématiques pour l'agrégation Rom

Grifone Algèbre linéaire Gri

P. Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation Cia