## 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $E$ un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

## I Généralités

### A Rappels sur l'étude d'endomorphismes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

**Définition 1 :** (polynôme minimal)
$\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[u]$, $P \to P(u)$ est un morphisme d'algèbre (où $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$) est une sous-algèbre commutative. Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[u]$ engendré par un unique polynôme unitaire $\pi_u$ appelé polynôme minimal de $u$.

**Exemple 2 :** si $u$ est nilpotent, $\pi_u = X^d$ où $d$ est l'indice de nilpotence de $u$.
- si $p$ est un projecteur non trivial, $\pi_p = X(X-1)$.
- si $s$ est une symétrie (différente de $\pm id_E$), $\pi_s = (X-1)(X+1)$.

**Proposition 3 :** On a $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$

**Proposition 4 :** Soient $u$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker v$ et $\operatorname{im} v$ sont stables par $u$. En particulier $\operatorname{Im} P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par $u$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

**Lemme 5 :** (lemme de décomposition des noyaux)
Soit $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_r$ leur produit. Alors on a la décomposition en somme directe :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$$

**Exemple 6 :** Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble $S$ des suites $u$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$, avec :
$Q = X^2 - aX - b$ et $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
Si le polynôme $Q$ a deux racines distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ alors le lemme des noyaux donne :
$S = \ker(T - \lambda_1 id) \oplus \ker(T - \lambda_2 id) = \{(A\lambda_1^n + B\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A,B) \in \mathbb{K}^2\}$.

**Définition 7 :** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de $A$ le polynôme $\chi_A(X) = \det(X I_n - A)$.

**Remarque 8 :** Puisque deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on définit le polynôme caractéristique de $u$ comme celui d'une de ses matrices.

**Exemple 9 :** en dimension 2, $\chi_u(X) = X^2 - \operatorname{tr} u\, X + \det u$.

**Proposition 10 :** $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u$ ssi $\chi_u(\lambda) = 0$ ssi $\pi_u(\lambda) = 0$.

**Théorème 11 :** (Cayley-Hamilton) : $\pi_u$ divise $\chi_u$.

### B Noyaux itérés

**Proposition 12 :** la suite $(\ker(u^k))_k$ est croissante stationnaire et on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \dim(\ker(u^{k+1})) = \dim(\ker(u^k)) + \dim(\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u^k))$$

**Corollaire 13 :** la suite $(\dim(\ker(u^{k+1})) - \dim(\ker(u^k)))_k$ est décroissante.

**Définition 14 :** $p = \min(\{q \in \mathbb{N} \mid \ker(u^{q+1}) = \ker(u^q)\})$ est appelé indice de Fitting de $u$.

**Proposition 15 :** $p \leq n$ et on a $E = \ker(u^p) \oplus \operatorname{Im}(u^p)$ (Décomposition de Fitting).

## II Trigonalisation

### A Critères de trigonalisation

**Définition 16 :** $u$ est trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

**Proposition 17 :** les propositions suivantes sont équivalentes :
i) $u$ est trigonalisable
ii) il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé
iii) $\pi_u$ est scindé
iv) $\chi_u$ est scindé.

**Corollaire 18 :** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

**Exemple 19 :** La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

**Application 20 :** Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$.

Corollaire 21 : Si $u$ est trigonalisable et si $F$ est un sev stable par $u$ alors $u_F$ est trigonalisable.

B Co-trigonalisation.

Définition 22 : Une famille d'endomorphismes $(u_1, \dots, u_N)$ d'un ev $E$ est co-trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle chacun des $u_k$, $k \in [\![1,N]\!]$ admet une matrice triangulaire.

Proposition 23 : Soit $u_1, \dots, u_N$ trigonalisables dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u_i$ et $u_j$ commutent pour tout $i,j \in [\![1,N]\!]$. Alors la famille $(u_1, \dots, u_N)$ est co-trigonalisable.

Proposition 24 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors les sous espaces propres de $u$ (resp $v$) sont $v$-stables (resp $u$-stables). A mettre au début de la partie

III Nilpotence

A Endomorphismes nilpotents

Définition 25 : On dit que $u$ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier $r$ tel que $u^r = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de $u$.

Exemple 26 : La dérivation $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{C}_n[X]$ est nilpotente.

Remarque 27 : L'indice de nilpotence est exactement égal à l'indice de Fitting.

Proposition 28 : Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) $u$ est nilpotent
ii) $\chi_u = X^n$
iii) il existe une base dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure stricte.
iv) $u$ est trigonalisable avec pour seule valeur propre $0$.
v) il existe $p \in \mathbb{N}$, $\pi_u = X^p$.

Proposition 29 : Soit $u$ nilpotent et $F \subset E$ $u$-stable, alors $u_{|F}$ est nilpotent.

Proposition 30 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u$ est nilpotent $\iff \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr} u^k = 0$

Exemple 31 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ c'est faux, $u = id_{(\mathbb{F}_p)^p}$.

B Cône nilpotent.

Proposition 32 : Si $u$ est nilpotent et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda u$ est nilpotent.

Proposition 33 : Soit $u$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, si $u$ et $v$ commutent et sont nilpotents alors $u+v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.

Contre exemple 34 : la commutativité est primordiale : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 35 : L'espace vectoriel engendré par les endomorphismes nilpotents est l'espace des endomorphismes de trace nulle : $\operatorname{vect}(\mathcal{N}) = \ker \operatorname{tr} = \{u \in \mathcal{L}(E), \operatorname{tr} u = 0\}$.

Application 36 : On peut dessiner le cône des matrices nilpotentes de taille 2 comme étant le cône d'équation $\{a^2 + bc = 0\}$.

IV Application à la réduction

A Décomposition de Dunford.

Proposition 37 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $u$. Soit $F = \beta H_1^{\alpha_1} \dots H_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ de $F$. Pour tout $i$ on note $N_i = \ker H_i^{\alpha_i}(u)$. On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et pour tout $i$ la projection sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en $u$.

Développement : Décomposition de Dunford.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
i) $d$ est diagonalisable, $n$ est nilpotente.
ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$
De plus $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$.

Théorème 38 : Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de $u$, alors celle de $e^u$ est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - id)$ où $e^d$ diagonalisable et $e^d(e^n - id)$ nilpotent.

Application 39 : $u$ est diagonalisable si et seulement si $e^u$ est diagonalisable.

Exemple 40 : $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

Application 41 : Résolution de l'équation différentielle $Y' = AY$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.
Ajouter des mots sur l'exponentielle + def exp : $M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ surj.

## B Réduction de Jordan.

**définition 42:** Un bloc de Jordan est une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont des 1 situés sur la sur diagonale : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

**Lemme 43 :** Soit $u$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Soit $x \notin \ker u^{q-1}$. Posons $F_x = \mathrm{Vect}(\{x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\})$. Alors :

- $F_x$ est $u$-stable et $B_x = \{x, \dots, u^{q-1}(x)\}$ en est une base
- $F_x$ admet un supplémentaire $u$ stable.

**Proposition 44** (décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors il existe des entiers $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ et une base dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs avec les blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$.
Cette matrice est appelée réduite de Jordan de $u$.

**Développement** (décomposition de Jordan)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres.
Alors il existe pour tout $j \in [\![1, m]\!]$ des entiers $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,n_j}$ tels que, dans une certaine base, la matrice de $u$ soit diagonale par blocs avec les blocs :

$$\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,2}}, \dots$$

ou encore $(B_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$

Exemple 45 :

**Proposition 46 :** Deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui admettent des polynômes caractéristiques scindés sont semblables, si et seulement si ils admettent la même réduction de Jordan.

**Définition 47 :** (Tableau de Young)
Le tableau de Young associé à la suite finie d'entiers $S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r > 0$ est un tableau à $r$ lignes (alignées à gauche), la première comptant $S_1$ cases, la deuxième $S_2$ cases, ..., la dernière $S_r$ cases. On le note $TY(S_1, \dots, S_r)$

Exemple 48. Le tableau de Young de $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent est $TY(d_1, \dots, d_r)$ avec $d_1 \geq \dots \geq d_r > 0$ sont les entiers associés à $u$ de la proposition 44.

**Proposition 49 :** Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si et seulement si ils admettent les mêmes tableaux de Young

Exemple 50 : Lecture d'un tableau de Young.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Regardons son tableau de Young :

- la dimension de l'espace est le nombre total de cases du tableau
- le nombre de ligne est égal à $\dim \ker u$
- $rg(u)$ = nombre total de case − nombre de case de la première colonne.
- pour trouver les sous espaces associés à $\mathrm{Im}(g^k)$, on enlève les $k$ dernières cases de chaque ligne.
- pour trouver les sous espaces associés à $\ker g^k$ on garde les $k$ premières cases de chaque ligne
- l'indice de nilpotence est le nombre maximal de cases sur une ligne.

Application 51 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotentes ayant même polynôme minimal et même rang. Alors si $n \leq 6$, $A$ et $B$ sont semblables. En dimension 7 c'est faux. Considérer les tableaux $(3,2,2)$ et $(3,3,1)$.

Références :

J'intègre MP - MP*

Réduction des endomorphismes Mansuy Mneimné

Mathématiques pour l'agrégation Rombaldi

Objectif agrégation Beck Malick.