156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

I Construction de l'exponentielle de matrices et propriétés

Théorème 1 : Soit $\sum a_k z^k$ une série entière à coefficients réels ou complexes de rayon de convergence $R > 0$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors
i) Si $\rho(A) < R$, la série de terme général $a_k A^k$ est normalement convergente.
ii) Si $\rho(A) > R$, la série diverge.
On note alors pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant i), $f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$

Théorème 2 : Avec les notations précédentes, la matrice $f(A)$ est un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A). (donc $\exp(A)$ commute avec A).

Définition 3 : (exponentielle de matrice)
L'application $M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est bien définie et continue sur $M_n(\mathbb{K})$. On l'appelle exponentielle de A et on note $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

Remarque 4 : En posant $n = 1$, on retrouve l'exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples 5 :
- si A est nilpotente d'indice $q \geq 1$ alors $e^A = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$, en particulier $e^0 = I_n$ redondant ?
- $\exp(I_n) = e \cdot I_n$
- $\exp(\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ redondant ?

Proposition 6 : On a $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

Proposition 7 : Si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

Remarque 8 : C'est faux si A et B ne commutent pas. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 9 : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, e^A est inversible d'inverse e^{-A}. (rajouter $\det e^A = e^{\mathrm{tr}(A)}$)

Proposition 10 : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$ et $\exp(\bar{A}) = \overline{\exp(A)}$

Proposition 11 : Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.
En particulier, si A et $B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, e^A et e^B le sont également.

Remarque 12 : pour calculer l'exponentielle d'une matrice on essaye donc avant de la diagonaliser ou trigonaliser (si possible).

II Calcul pratique de l'exponentielle.

Proposition 13 : Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice $n \geq 1$, alors $e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.

Proposition 14 : Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Proposition 15 : Soit $P = P_1 \dots P_r$ un polynôme annulateur de f avec $P_1, \dots, P_r$ premiers entre eux deux à deux. On a $E = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_r(f)$ et la projection sur $\ker P_i(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker P_j(f)$ est un polynôme en f.

Développement (Décomposition de Dunford).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) dans $\mathcal{L}(E)$ tel que :
i) d est diagonalisable, n est nilpotent
ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

⚠ Rajouter les exemples.

Proposition 16 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de décomposition de Dunford $A = D + N$. Alors $\exp(A)$ admet pour décomposition de Dunford $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)[\exp(N) - I_n]$.

Application 17 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

III Exponentielle et topologie.

A Injectivité et surjectivité

Proposition 18 : L'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(A) = I_n$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 19 : lorsque $n \geq 2$, l'exponentielle n'est pas injective sur $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 20 : $\exp\begin{pmatrix}0 & -2\pi\\ 2\pi & 0\end{pmatrix} = I_2 = \exp O_{2,2}$.

Dvlpt 21 : Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^{Q(A)} = A$ (l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$).

Application 22 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corollaire 23 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in GL_n(\mathbb{C})$ polynomiale en A telle $X^p = A$.

Proposition 24 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il y a équivalence entre les propriétés :
i) il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = e^B$
ii) il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$

B Homéomorphismes

Définition 25 : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp symétriques définies positives) à coefficients réels.
exemples ?

$\boxed{\text{Développement}}$ l'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Définition 26 : On note $H_n(\mathbb{C})$ (resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices hermitiennes (resp hermitiennes définies positives) complexes.
exemples ?

Proposition 27 : l'application $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Définition 28 : En partant du développement en série entière de la fonction logarithme complexe on peut définir la fonction logarithme matriciel, sur D, l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\rho(A) < 1$ par $\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$.

Remarque 29 : $\ln(I_n + A)$ est un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).

Exemple 30 : • $\ln(I_n) = 0$

• Pour toute matrice A nilpotente d'indice $q \geq 2$, $\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k$

Théorème 31 : En notant $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes à coefficients complexes et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unipotentes complexes, $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est bijective d'inverse le logarithme matriciel.

IV Applications aux équations différentielles

Proposition 32 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K}),\ t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA).A$$

Remarque 33 : Plus généralement, l'application $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$ de la proposition précédente est de classe C^∞ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi^{(p)}(t) = A^p \exp(tA) = \exp(tA) A^p.$$

Proposition 34 : (EDO homogène à coefficients constants) permet de démontrer prop 7.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$. L'application :

$$\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0.$$

Exemple 35 :

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \text{et } x(0) = y(0) = 0$$

Proposition 36 : (EDO à coefficients constants) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{K}^n$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ une application continue. Alors l'unique solution du problème $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par : $y : t \in I \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$.

Scanné avec CamScanner

Références :

- J'intègre MP MP*
- Mathématiques pour l'agrégation (Algèbre et géométrie) Rombaldi
- Algèbre linéaire Mansuy - Mneimné
- Maths en tête Algèbre X. G
- Equations différentielles Berthelin