155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $car(\mathbb{K}) \neq 2$.

I Généralités

A Eléments propres

Définition 1 (valeur propre, vecteur propre, sous espace propre)

i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est à dire si l'endomorphisme $u - \lambda id_E$ est non injectif.

ii) On dit que $x \in E$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ s'il est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ est : $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$

Remarque 2: 0 est valeur propre de u si et seulement si $\ker u \neq \{0\}$

Définition 3: Le spectre de u noté $Sp(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.

Exemple 4: • Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie λid_E pour la valeur propre λ. Par suite cette homothétie admet λ pour unique valeur propre et l'espace propre associé est E.

• Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Sp(A) = \emptyset$ sur $\mathbb{R}$ et $Sp(A) = \{-i, i\}$ sur $\mathbb{C}$.

Proposition 5: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u distinctes deux à deux. Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

B Polynômes d'endomorphismes

Définition 6: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On définit $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$ avec u^k la k-ième itérée de u.

Proposition 7: L'application $\Psi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre.
Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur.
L'ensemble $\{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est alors une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 8: $\mathbb{K}[X]$ étant principal, il existe un unique P unitaire de $\mathbb{K}[X]$ tel que $(P) = \ker \Psi_u$.
Le polynôme P s'appelle polynôme minimal de u, noté Π_u.

Proposition 9: On a $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \Pi_u$.

Exemple 10: • Si u est nilpotent, Π_u est de la forme X^k où k est l'indice de nilpotence de u.
• Si h est une homothétie de E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $h = \lambda id_E$ et $\Pi_h = X - \lambda$.
• Si p est un projecteur non nul et différent de l'identité, $\Pi_p = X^2 - X$

Proposition 11: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in Sp(u)$ si et seulement si $\Pi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 12: Si les endomorphismes u et v commutent alors $\ker v$ et $\operatorname{im} v$ sont u-stables.
En particulier, $\ker(P(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))$ sont stables par u pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$

Théorème 13: (lemme de décomposition des noyaux)
Soit $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_n$ leur produit. On a alors la décomposition en somme directe :
$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{n} \ker P_k(u)$.

Exemple 14: Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble S des suites u telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$ avec : $Q = X^2 - aX - b$ et $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Si le polynôme Q a deux racines distinctes λ_1 et λ_2 alors le lemme des noyaux donne :
$S = \ker(T - \lambda_1 id) \oplus \ker(T - \lambda_2 id) = \{(A\lambda_1^n + B\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (A,B) \in \mathbb{K}^2\}$.

C Polynôme caractéristique

Définition 15: Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est le polynôme défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 16: Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition 17: Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses matrices.

Exemple 18: (calcul pratique de χ_A)
En dimension 2, $\chi_A = X^2 - tr(A)X + \det A$.
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^3$ et $\Pi_A = X - 1$.

Proposition 19: Soit $F \subset E$ u-stable. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ où u_F est l'endomorphisme induit.

Corollaire 20 : Pour tout $\lambda \in Sp(u)$ on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Proposition 21 : $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Théorème 22 : (Cayley - Hamilton) : $\chi_u(u) = 0$ ou encore $\pi_u \mid \chi_u$.

II Diagonalisabilité

A Critères de diagonalisabilité

Définition 23 : u est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Exemple 24 : Les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Théorème 25 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable
ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
iii) π_u est scindé à racines simples
iv) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in Sp(u)$ $\dim E_\lambda = m(\lambda)$.

Application 26 : si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable.

Développement : (Suite de polygones)

Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ a_m & a_1 & & a_{m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}\right) = \prod_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1} \omega^{ki} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$$

On définit par récurrence une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = (z_1^0, \dots, z_m^0)$ et

$$P_{k+1} = \left(\frac{z_1^k + z_2^k}{2}, \dots, \frac{z_{m-1}^k + z_m^k}{2}, \frac{z_m^k + z_1^k}{2} \right) \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

Alors $P_k \to (g, \dots, g)$ où $g = \text{isobar}(z_1^0, \dots, z_m^0)$

Corollaire 27 : Si $F \subset E$ est u-stable et u diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

B Co-diagonalisation

Proposition 28 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors
i) Tout sous espace propre de u est stable par v (en particulier $\ker u$)
ii) $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

Théorème 29 (Diagonalisation simultanée)
Si u et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de u et v. (on dit que u et v sont codiagonalisables).

Remarque 30 : la réciproque est vraie

C Liens avec les endomorphismes semi-simples

Définition 31 : On dit que u est semi simple si tout sev de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Théorème 32 : Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors u est semi simple si et seulement si u est diagonalisable.

Théorème 33 : u est semi simple si et seulement si π_u est sans facteur carré

Exemple 34 : si u est nilpotente, alors u est semi simple si et seulement si $u = 0$.

III Décomposition de Dunford

$\boxed{\text{Développement}}$ (Décomposition de Dunford)

On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagonalisable, n nilpotent tels que :

i) $u = d + n$ ii) $n \circ d = d \circ n$

et d et n sont des polynômes en u.

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$
Alors $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exemple 35 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⚠ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 36 : un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

IV Théorèmes spectraux

Dans cette partie E est un espace euclidien ou hermitien (de dimension finie) muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Définition 37 : Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$$\forall x,y \in E^2 \quad , \quad \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle .$$

Exemple 38 : Si p est un projecteur, $p^* = p$

Définition 39 : u est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$.
u est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

Exemple 40 : On a les mêmes définitions pour les matrices. Une matrice symétrique ou orthogonale (resp hermitienne ou unitaire) est normale.
Prop : $F \subset E$ u stable. Alors $F^\perp$ est u^* stable (F sev)
Théorème 41 (Spectral) : Tout endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 42 : Toute matrice symétrique est diagonalisable

Exemple 43 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Théorème 44 : Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) u est normal
ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E.
iii) u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Références :

- J'intègre HP-HP*
- Monier, Mneimné Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes
- Objectif Agrégation Beck - Malick
- Maths en tête X. G (Algèbre)
- Mathématiques pour l'agrégation J.E. Rombaldi.