154 : Sous espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I Sous espaces stables par un endomorphisme.

A Généralités

Définition 1 : Un sev F de E est stable par u si $u(F) \subset F$. On note alors $u_F : F \to F$, $x \mapsto u(x)$ l'induit de u sur F.

Exemple 2 : $\ker u$ et $\operatorname{im} u$ sont stables par u.

Remarque 3 : Il ne faut pas confondre $u_{|F} : F \to E$ et $u_F : F \to F$.

Proposition 4 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u. Alors $\ker v$ et $\operatorname{im} v$ sont stables par u. En particulier, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}(P(u))$ et $\ker P(u)$ sont stables par u.

Exemple 5 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$ est stable par u et E_λ est le sous espace propre associé à λ. S'il est non réduit à $\{0\}$ on dit que λ est valeur propre de u.

Exemple 6 : Soit p un projecteur, c'est à dire la projection sur $\ker(p - id_E)$ parallèlement à $\ker p$. Soit $F \subset E$, F est stable par p si et seulement si F est somme directe d'un sous espace de $\operatorname{Im} p$ et d'un sous espace de $\ker p$.

Exemple 7 : Soit $v \in \operatorname{Aut}(E)$ et $F \subset E$ stable par u. Alors $v(F)$ est un sous espace stable par $v \circ u \circ v^{-1}$.

Proposition 8 : Soit $F \subset E$. Si F est stable par u alors $\pi_{u_F} \mid \pi_u$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

B Sous espaces stables et dualité

Définition 9 : Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$

Définition 10 :
i) Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble $A^\perp$ est un sev de E^* appelé orthogonal de A.
ii) Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$. L'ensemble B° est un sev de E appelé orthogonal de B.

Exemple 11 : Si $\varphi \in E^*$ alors $\{\varphi\}^\circ = \ker \varphi$.

Théorème 12 :
i) Si F est un sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\circ = F$.
ii) Si G est un sev de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $(G^\circ)^\perp = G$.

Définition 13 : On définit ${}^t u : E^* \to E$, $\varphi \mapsto u \circ \varphi$.

Proposition 14 : (lien avec la stabilité)
Un sev $F \subset E$ est u stable $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est ${}^t u$ stable.

II Applications à la réduction

A Diagonalisabilité

Définition 15 : u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exemple 16 : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Proposition 17 : Soit $\lambda \in Sp(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. Alors, $\dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$

Corollaire 18 : Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable

Remarque 19 : La réciproque est fausse, il suffit de considérer $u = id$.

Proposition 20 : On a équivalence entre :
i) u est diagonalisable
ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$ pour tout $\lambda \in Sp(u)$
iii) $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E$.

Exemple 21 : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Théorème 22 : On a équivalence entre :

i) u est diagonalisable

ii) π_u est scindé à racines simples

iii) u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

Corollaire 23 : Soit F un sous espace stable par u. Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable (où u_F est l'endomorphisme induit).

Proposition 24 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation pour les u_i.

B Trigonalisabilité

Définition 25 : u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Proposition 26 : On a équivalence entre :

i) u est trigonalisable

ii) χ_u est scindé

iii) u est annulé par un polynôme scindé.

Corollaire 27 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est trigonalisable.

Exemple 28 : Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (c'est une conséquence de d'Alembert Gauss).

Proposition 29 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux. Alors il existe une base commune de trigonalisation pour les u_i.

C Lemme des noyaux et décomposition de Dunford.

Théorème 30 : (lemme des noyaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P_1,\dots,P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_r$ leur produit.
On a alors la décomposition en somme directe :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$$

exemple 30 : Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble S des suites u telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$, est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$ avec $Q = X^2 - aX - b$ et $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u_n \mapsto (u_{n+1})$. Si le polynôme Q a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors le lemme des noyaux donne :

$$S = \ker(T-\lambda_1 id) \oplus \ker(T-\lambda_2 id) = \{(A\lambda_1^n + B\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \ (A,B) \in \mathbb{K}^2\}$$

Développement (Décomposition de Dunford)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Alors il existe un unique couple $(d,m) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, m nilpotent et :
$u = d+m$, $d\circ m = m \circ d$
De plus d et m sont des polynômes en u.

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors $\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exemple 31 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⚠ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 32 : un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

III Endomorphismes remarquables

A Endomorphismes cycliques

Notation 33 : On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u) : P \in \mathbb{K}[X]\}$
Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$ et E_x l'ensemble $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$
Dans la suite on note k le degré de π_u et l le degré de P_x pour $x \in E$.

Proposition 34 : L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension k, dont une base est $(id_E, u, \dots, u^{k-1})$
L'ensemble E_x est un sev de E de dimension l dont une base est $(x, \dots, u^{l-1}(x))$.

Proposition 35 : Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_u$.

Définition 36 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.
D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $k = \deg \pi_u = n$ (ou encore que $\pi_u = \chi_u$ où χ_u est le polynôme caractéristique de u).

Définition 37 : Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 38 : Le polynôme caractéristique $\chi_{C(P)}$ de $C(P)$ vérifie $\chi_{C(P)} = P$.

Proposition 39 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u soit égale à $C(\pi_u)$.
Thm de Cayley Hamilton : $\chi_u(u) = 0$

B Endomorphismes semi simples

Définition 40 : On dit que u est semi simple si tout sev de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.
Lemme : Si π_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ alors u est semi-simple.
$\boxed{\text{Développement}}$ u est semi simple si et seulement si π_u est sans facteur carré.

Exemple 41 : Si u est nilpotent, alors u est semi-simple si et seulement si $u = 0$.

Exemple 42 : Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi simples.

Références :

- J'intègre MP-MP*
- Mansuy, Mneimné Algèbre linéaire - réduction des endomorphismes
- Objectif Agrégation Beck - Malick.
- Maths en tête Algèbre X. G.
- Mathématiques pour l'agrégation J.E. Rombaldi.