153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit $P(f) = \sum_{k=0}^{r} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$.

I Polynômes d'endomorphismes

A Algèbre $\mathbb{K}[f]$ et polynôme minimal

Définition 1 (polynôme minimal)
L'application $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(f)$ est un morphisme d'algèbre. Son noyau, l'ensemble des polynômes annulateurs de f, est un idéal de $\mathbb{K}[f]$ principal donc engendré par un unique polynôme unitaire π_f appelé polynôme minimal de f. Son image $\mathbb{K}[f]$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 2 : le noyau est non réduit à $\{0\}$, φ_f ne peut pas être injectif puisque c'est une application linéaire entre un espace de dimension infinie et un espace de dimension finie.

Proposition 3 : On a $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg \pi_f$ et $(id, f, \dots, f^{\deg \pi_f - 1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Exemple 4 :
- Si u est un endomorphisme nilpotent, $\pi_u = X^p$ où p est l'indice de nilpotence de u.
- Si h est une homothétie de E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $h = \lambda id_E$ et $\pi_h = X - \lambda$.
- Si p est un projecteur différent de id_E et de 0 alors $\pi_p = X(X-1)$
- Si s est une symétrie différente de $\pm id_E$ alors $\pi_s = X^2 - 1$.

Remarque 5 : Se donner $f \in \mathcal{L}(E)$ revient à se donner sa matrice M dans une base de E. On a donc les mêmes résultats pour les matrices et si M est une matrice de f dans une certaine base alors $\pi_f = \pi_M$ (en particulier deux matrices semblables ont même polynôme minimal).

Remarque 6 : La réciproque est fausse. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors les deux matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ont pour polynôme minimal X^2 mais ne sont pas semblables.

Proposition 7 : Soit F un sous espace stable par u, alors $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$.

Proposition 8 : Les valeurs propres de u sont exactement les racines de $\pi_u(X)$.

Corollaire 9 : Si P est un polynôme annulateur de u alors $Sp(u) \subset Rac(P)$

B Polynôme caractéristique

Définition 10 : Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme unitaire χ_A de degré n défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Exemple 11 : En dimension 2, on a $\chi_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$
Si M est nilpotente, alors $\chi_M(X) = X^n$

Proposition 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$.

Application / développement : déterminant circulant — à mettre dans la partie diagonalisation.
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}\right) = \prod_{0 \leq k \leq n-1} P(\omega^k) \quad \text{où} \quad \begin{cases} P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} X^i \\ \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \end{cases}$$

Proposition (convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre)
On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Alors $P^{(k)} \longrightarrow (g, \dots, g)$ où $g = \text{isobar}(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$.

Remarque 13 : La réciproque est fausse. L'exemple de la remarque 6 donne un contre-exemple.

Proposition 14 : Les polynômes π_u et χ_u ont les mêmes racines.

C Sous espaces stables

Proposition 15 : Si les endomorphismes u et v commutent alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u. En particulier $\ker(P(u))$ et $\operatorname{Im}(P(u))$ sont stables par u pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$

Théorème 16 : (Lemme de décomposition des noyaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P_1, \dots, P_s) \in \mathbb{K}[X]^s$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \cdots P_s$ leur produit.
On a alors la décomposition en somme directe :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker P_k(u)$$

Exemple 17 : Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. L'ensemble S des suites u telles que :
$\forall m\in\mathbb{N}\ u_{m+2}=au_{m+1}+bu_m$, est le noyau de l'endomorphisme $Q(T)$ avec : $Q=X^2-aX-b$ et $T:\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $u_m\mapsto(u_{m+1})$. Si le polynôme Q a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors le lemme des noyaux donne :
$$S=\mathrm{Ker}(T-\lambda_1 id)\oplus\mathrm{Ker}(T-\lambda_2 id)=\{(A\lambda_1^m+B\lambda_2^m)_{m\in\mathbb{N}},\ (A,B)\in\mathbb{K}^2\}.$$

Définition 18 : Soit $\lambda\in Sp(u)$, on définit les sous espaces propres et caractéristiques associés à la valeur propre λ par :
$$E_\lambda(u)=\ker(u-\lambda id_E)\quad\text{et}\quad E'_\lambda(u)=\ker(u-\lambda id_E)^{m(\lambda)}$$
où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Proposition 19 : Ces sous espaces sont stables par u d'après la proposition 15.

Définition 20 : Soit $P=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$, alors sa matrice compagnon est
$$C_P=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&&&\vdots\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&&1\ 0&-a_{p-2}\\0&0&&0\ 1&-a_{p-1}\end{pmatrix}$$

Proposition 21 : Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$ unitaire, alors $\chi_{C_P}=\Pi_{C_P}=P$

Théorème 22 (Cayley-Hamilton) : $\chi_u(u)=0$.

D Utilisation pratique d'un polynôme annulateur.

Proposition 23 : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E admettant un polynôme annulateur P tel que $P(0)\neq0$. Alors, u est inversible et $u^{-1}\in\mathbb{K}[u]$.

Corollaire 24 : u est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de Π_u.

Exemple 25 : Si u vérifie $u^4+u+id=0$ alors u est inversible et $u^{-1}=-u^3-id$.

Proposition 26 : Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel admettant un polynôme annulateur de degré N. Alors pour tout $m\in\mathbb{N}$:
$$u^m\in\mathrm{Vect}(id_E,\dots,u^{N-1})$$

Exemple 27 : Soit $a,b\in\mathbb{C}$ où $a\neq b$ et u un endomorphisme de E tel que $P(u)=(u-a)(u-b)=0$
Alors $\forall m\in\mathbb{N}$ $u^m=\frac{a^m-b^m}{a-b}u+\frac{ba^m-ab^m}{b-a}id_E$.

II Réduction d'endomorphismes

A Endomorphismes diagonalisables

Définition 28 : Un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
exemples : projection et symétrie diagonalisables.

Proposition 29 : Si $sp(u)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ avec $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ distincts deux à deux alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) u est diagonalisable
ii) $\bigoplus_{i=1}^{r}E_{\lambda_i}(u)=E$
iii) Π_u est scindé à racines simples
iv) $\forall\lambda\in Sp(u)$ $\dim E_\lambda(u)=m(\lambda)$
v) u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

Corollaire 30 : Si u a n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable

Remarque 31 : La réciproque est fausse considérer I_n.

Exemple 32 : $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a=0$.

B Endomorphismes trigonalisables

Définition 33 : Un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire

Proposition 34 : On a équivalence entre :
i) u est trigonalisable
ii) χ_u est scindé
iii) u est annulé par un polynôme scindé.

Corollaire 35 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est trigonalisable.
Ex : dans $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

C Décomposition de Dunford

Développement : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Alors il existe un unique couple $(d,n)\in\mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n nilpotent et :
$u=d+n$, $d\circ n=n\circ d$
De plus d et n sont des polynômes en u.

Application : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $\mu_1, \dots, \mu_n$ les n racines de χ_M (pas nécessairement distinctes). Soit (D, N) la décomposition de Dunford de M. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1} D P = \Delta = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ soit diagonale. Alors :

$$\exp(A) = P \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

Exemple 36 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⚠ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ajouter une partie sur l'exp de matrice ? oui (les propriétés générales)

Références :

- J'intègre MP-MP*
- Mansuy, Mneimné Algèbre linéaire - réduction des endomorphismes
- Objectif Agrégation Beck-Malick.

Scanné avec CamScanner