152 : Déterminant. Exemples et applications

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique $car(\mathbb{K}) \neq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

I Définitions et propriétés générales

A Formes n-linéaires alternées, déterminant d'une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n.

Définition 1 (n-linéaire, alternée)
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application.
i) On dit que f est n-linéaire si en tout point les n applications partielles sont linéaires. L'ensemble des formes n linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$
ii) Si $f \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$, on dit que f est alternée si $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

Exemple 2 : si $\varphi_1,\dots,\varphi_p \in E^*$, l'application $E^p \to \mathbb{K}$ $(x_1,\dots,x_p) \mapsto \varphi_1(x_1)\dots\varphi_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E.

Proposition 3 : $\dim \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K}) = (\dim E)^p$

Théorème 4 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$ev E de dimension n est un $\mathbb{K}$ ev de dimension 1. Il existe une seule forme n linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E.

Définition 5 : (déterminant d'une base)
Soit B une base de E. On appelle déterminant dans la base B et on note $\det_B$ l'unique forme n linéaire alternée égale à 1 sur B.
Si $x_1,\dots,x_n \in E$ $(x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j)$, le déterminant de $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base B est $\det_B(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$

Corollaire 6 : (changement de base)
Soit f une forme n linéaire alternée, on a $f(x_1,\dots,x_n) = f(e_1,\dots,e_n) \det_B(x_1,\dots,x_n)$
Si B et B' sont deux bases de E alors $\det_{B'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{B'} B \cdot \det_B(x_1,\dots,x_n)$.

Théorème 7 : (caractérisation d'une famille liée, libre)
Soient $x_1,\dots,x_n \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes
i) Les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ forment une famille liée
ii) Pour toute base B de E, $\det_B(x_1,\dots,x_n) = 0$
iii) Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1,\dots,x_n) = 0$.

B Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.

Définition 8 : Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_B(f(e_1),\dots,f(e_n))$ ne dépend pas de B. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det f$.

Proposition 9 : i) Si $f,g \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f\circ g) = \det f \cdot \det g$.
ii) $\det id_E = 1$
iii) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors ($f \in GL(E) \iff \det f \neq 0$) et on a $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Définition 10 : Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, et on note $\det A$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 11 : Si $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ on note aussi : $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Propriétés 12 : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
i) On ne change pas la valeur du déterminant lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose sur les lignes.
ii) $\det({}^tA) = \det A$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
iii) $\det AB = \det A \cdot \det B$
iv) Si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$.
v) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

II Méthodes de calcul de déterminants

Exemple 13 : il existe des formules simples en dimension 2 et 3 (règle de Sarrus). Au delà, les expressions des déterminants deviennent plus compliquées.

A Mineurs et cofacteurs

Définition 14 (mineur, cofacteur, comatrice).
Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout (i,j) on appelle mineur de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la $i$ième ligne et la $j$ième colonne de A. Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$
s'appelle cofacteur de $a_{i,j}$

La matrice $(A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A notée com(A).

Proposition 15 (développement selon une ligne ou une colonne)

i) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$.

ii) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on a $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$.

Proposition 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A\,{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A).A = (\det A).I_n$.

Exemple 17 : En dimension deux, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible on a $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

B Matrices triangulaires par blocs

Théorème 18 : Si A est une matrice triangulaire, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Application 19 : Pivot de Gauss

La formule du théorème 15 est impraticable en réalité (trop d'opérations). Avec des opérations sur les lignes et les colonnes, on transforme toute matrice en une matrice triangulaire supérieure dont on calcule facilement le déterminant.

Théorème 20 : (déterminant par blocs)

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & B_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$ où les A_k sont des matrices carrées, alors on a

$$\det A = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$$

Exemple 21 : $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5$.

C Exemples classiques

$\boxed{\text{Développement}}$ Déterminant circulant.

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, \omega^{ki} \quad \text{où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Proposition 22 : convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre.

On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Alors $P^{(k)} \longrightarrow (g, \dots, g)$ où $g = \mathrm{isobar}(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$

Exemple 23 : (déterminant de Vandermonde)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors $\det\left((a_i^{j})_{1\le i,j\le n}\right) = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$

Exemple 24 : (déterminant de Cauchy)

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ telles que $a_i + b_j \neq 0$. Alors :

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\le i,j\le n}\right) = \frac{\prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\le i,j\le n} (a_i + b_j)}$$

III Applications des déterminants en analyse.

Théorème 25 : (changement de variables)

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec U mesurable et φ un C^1 difféomorphisme de U sur V, dont le jacobien $J(\varphi)$ est borné sur U. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable et pour toute fonction continue et bornée $f : V \to \mathbb{R}$ on a : $\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|\det(d\varphi_u)|\,du$.

Application 26 (passage en coordonnées polaires)

Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$.

IV Applications des déterminants en algèbre

A Polynôme caractéristique.

Remarque 27 : On étend la formule explicite de la définition 5 à une matrice à coefficients dans un anneau A quelconque (le déterminant est un polynôme). Si A est intègre, les propriétés du déterminants restent vraies car A se plonge dans Frac(A).

Définition 28 : (polynôme caractéristique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de la matrice f dans une base B de E ne dépend pas de B. On l'appelle polynôme caractéristique de f et on le note χ_f.

Remarque 29 : On a $\chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$
Si A et B sont semblables alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.
On a $\chi_A(0) = \det A$.

Théorème 30 (Cayley - Hamilton) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

B Systèmes linéaires

Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$ et $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On s'intéresse à la résolution du système
(E) : $AX = B$ où $X \in M_{q,1}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Théorème 31 : $rg(A)$ est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de A.

Exemple 32 : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $rg(A) \geq 2$
et $rg\, A = 2 \iff (a, b) = (1, 3)$

Théorème 33 : (système de cramer)
Lorsque $p = q$, alors (E) admet une unique solution pour tout paramètre B si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas la solution X_B de (E) est le vecteur de coordonnées : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = \dfrac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det A}$

V Applications des déterminants en géométrie

A Volume d'un parallélépipède

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique. Pour $n = 2$, on a :

Théorème 34 : (Aire d'un parallélogramme)
L'aire $A(v, w)$ du parallélogramme engendré par v et w vaut $|\det(v, w)|$.
On peut généraliser en dimension quelconque.

Théorème 35 : (volume d'un parallélépipède)
Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. En notant $V(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$ on a $V(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

B Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe).

Définition 36 (matrice et déterminant de Gram).
Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $[\langle x_i, x_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (distance à un sous espace vectoriel)
Soit $V \subset E$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$. Alors la distance d de x à V ($d = \inf_{y \in V} \|x - y\|$) vérifie $d^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

Théorème 37 (inégalité de Hadamard).
Les vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_n$ d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient :
$|\det M| \leq \|X_1\| \cdots \|X_n\|$, où pour tout i, $\|X_i\| = \sqrt{X_i^* X_i}$ désigne la norme hermitienne standard.
Si pour tout i, $X_i \neq 0$, l'inégalité devient une égalité si et seulement si la famille (X_i) est orthogonale.

Remarque 38. Le résultat reste vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.