151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

I Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$ ev dont on rappelle la définition :

Définition 1 : (espace vectoriel, sous espace vectoriel)
i) $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev si $(E,+)$ est un groupe abélien et si pour tout $(x,y)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$:
a) $\lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$ b) $(\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$.
c) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ d) $1.x = x$
ii) Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ev et $F\subset E$. On dit que F est un sev de E si $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev.

Exemple 2 : Une intersection de sev de E est un sev de E. C'est faux pour l'union.

A Familles génératrices, familles libres, base

Définition 3 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
i) $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice lorsque $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I}) = E$. Lorsque E possède une famille génératrice finie, on dit que E est de dimension finie.
ii) $(e_i)_{i\in I}$ est dite libre lorsque $\forall(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I$, $\sum\lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0$.
Si ce n'est pas le cas la famille est dite liée.
iii) Si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice, on dit que c'est une base de E.
iv) Soient $(E_i)_{i\in I}$ des sev de E. On dit que E est la somme directe des $(E_i)_{i\in I}$ si $\sum_{i\in I} E_i = E$ et que la décomposition de tout vecteur de E dans $(E_i)_{i\in I}$ est unique.

Exemple 4 : • $(\sin,\cos)$ est libre sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
• La famille $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
• $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

pas besoin de supposer $|E|<+\infty$
Si $|E|=+\infty$ axiome du choix.

Théorème 5 : (Théorème de la base incomplète) /
Soient $\mathcal{L}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base B de E telle que $\mathcal{L}\subset B\subset\mathcal{G}$.

Conséquences en dimension finie :
- Tout $\mathbb{K}$ev de dimension finie admet une base
- De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
- Toute partie libre peut être complétée en une base (théorème de la base incomplète).

B Théorie de la dimension

On suppose que E est de dimension finie.

Théorème 6 : Toutes les bases de E ont même cardinal n. L'entier n s'appelle la dimension de E et on note $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 7 : i) Tout système libre de n vecteurs de E est une base de E.
ii) Tout système générateur de n vecteurs de E est une base de E. } FAUX en dim ∞

Proposition 8 : Soient E_1 et E_2 deux sev de E :
i) E_1 est de dimension finie, $\dim(E_1)\leq\dim E$ et $\dim E_1 = \dim E \iff E_1 = E$.
ii) Formule de Grassmann : $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1\cap E_2$.
iii) E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E (ie $E = E_1\oplus E_2$) si et seulement 2 des propriétés suivantes sont vérifiées : $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$, $E_1\cap E_2 = \{0\}$, $E = E_1+E_2$

II Rang d'une application linéaire.

Soient E et F des ev de dimension finie n et m.

A Applications linéaires

Définition 9 : $f : E\to F$ est linéaire si
$\forall(x,y)\in E^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ $f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$.
$\mathcal{L}(E,F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$

Exemple 10 : $\varphi : C([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ $f\mapsto\int_0^1 f(t)dt$ est linéaire.
Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base de E.

Définition 11 : (rang d'une application linéaire)
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$, on note $\mathrm{rg}(f)$ et on appelle rang de f l'entier $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

Théorème 12 : (Théorème du rang)
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg} f = \dim E$.

Application 13 : Noyaux itérés, $(\mathrm{rg}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante stationnaire.

Scanné avec CamScanner

Corollaire 14 : Lorsque $n = m$, alors :
(f bijective) $\Leftrightarrow$ (f injective) $\Leftrightarrow$ (f surjective)

Remarque 15 : Le résultat est faux en dimension infinie, par exemple
$f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto P'$ est linéaire surjective mais pas bijective.

B Représentations matricielles d'une application linéaire.

Définition 16 : (Matrice d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ et C sont des bases de E et F, on définit la matrice $M_{B,C}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de f dans la base B et C comme la matrice de vecteurs colonnes les $(f(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ exprimés dans la base C

Définition 17 : (rang d'une famille de vecteurs et d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^m$ et on le note $\mathrm{rg}\, A$. Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, f$.

Proposition 18 : Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 19 : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Proposition 20 : Le rang d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul.

Corollaire 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Application 22 : Dans la pratique on utilise la méthode du pivot de Gauss pour obtenir le rang d'une matrice.

III Les conséquences de la dimension finie.

A Espaces vectoriels normés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe de dimension quelconque (on suppose la notion de norme connue)

Théorème 23 : (Théorème de Riesz)
E est de dimension finie si et seulement $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte

Théorème 24 : Si $\dim E < +\infty$, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 25 : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn (quelconque) est continue
Tout evn de dimension finie est complet
Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé
Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Remarque 26 : Tous ces corollaires sont faux en dimension infinie. Par exemple :
- On considère $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto P'$ sur l'evn $(\mathbb{R}[X], \|\sum_i a_i X^i\| = \sup_i |a_i|)$.
  Alors f n'est pas continue (en effet $f(X^n) = n$ et $\|X^n\| = 1$).
- Tout evn à base dénombrable n'est pas complet (par l'abs construire une suite abs cv qui ne cv pas simplement) ou th. de Baire.

B Dualité

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n.

Définition 27 : (espace dual)
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace dual de E.
À toute base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E on associe la famille $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* où e_i^* est la projection sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((e_j)_{j \neq i})$

Proposition 28 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de B et donc $\dim E^* = \dim E$. De plus, $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

Application 29 : si $\phi \in E^*$ non nulle, alors son noyau est un hyperplan.

Définition 30 : (Orthogonal)
- Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$, c'est un sev de E^* appelé orthogonal de A.
- Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$, c'est un sev de E appelé orthogonal de B.

Exemple 31 : Si $\varphi \in E^*$, alors $\{\varphi\}^\circ$ est le noyau de φ.

Proposition 32 : Si F est un sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$.
Si G est un sev de E^*, $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Conséquence : En dimension finie, un sous espace est égal à l'espace tout entier si et seulement son orthogonal est nul.

IV Applications

A Réduction d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On suppose les notions de polynômes d'endomorphismes et de valeurs / vecteurs / espaces propres connues.

Lemme 33 (lemme de décomposition des noyaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $(P_1, \dots, P_k) \in \mathbb{K}[X]^k$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \dots P_k$ leur produit. On a alors la décomposition en somme directe :

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$$

Remarque 34 : En pratique on utilise souvent ce lemme avec P tel que $P(u) = 0$. On obtient alors une décomposition de E en sous espaces stables car $\ker(Q(u))$ est u stable VQ.

Définition 35 : (polynôme caractéristique).
On définit le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
On définit le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ comme le polynôme caractéristique d'une de ses matrices dans n'importe quelle base de E, on le note χ_u (χ_A est invariant par similitude).

Théorème 36 : (Cayley-Hamilton) pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$

Théorème 37 : (critères de diagonalisabilité) : Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples $\Leftrightarrow$ iii) π_u est scindé à racines simples $\Leftrightarrow$ iv) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in Sp(u)$ $\dim E_\lambda = m(\lambda)$.

Proposition 38 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de u. Soit $F = \beta H_1^{\alpha_1} \dots H_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i on note $N_i := \ker H_i^{\alpha_i}(u)$.
On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Développement (Décomposition de Dunford)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
i) d est diagonalisable, n est nilpotent ii) $u = d + n$ et $dn = nd$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Application 39 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors u diagonalisable si et seulement si e^u l'est.

B Lien avec les endomorphismes semi simples

Définition 40 : On dit que u est semi simple si tout sev de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Théorème 41 : Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors u est semi simple si et seulement si u est diagonalisable.

Développement : u est semi simple si et seulement si π_u est sans facteur carré.

Exemple 42 : si u est nilpotent, alors u est semi simple si et seulement si $u = 0$.

C Corps finis

On ne considère que des corps commutatifs.

Définition 42 : (extension de corps, degré)
Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. On dit que $\mathbb{L}$ est une extension de corps de $\mathbb{K}$. $\mathbb{L}$ est alors un $\mathbb{K}$-ev. Quand $\dim \mathbb{L}$ est finie, on note $[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = \dim(\mathbb{L})$ et on l'appelle le degré de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. On dit alors que l'extension est finie.

Théorème 43 : (théorème de la base télescopique)
Soient $\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ des corps, $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $(f_j)_{j \in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$. Alors $(e_i f_j)_{i,j \in I \times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$. En particulier, lorsque deux des degrés d'extensions sont finis, le troisième l'est aussi et on a $[\mathbb{M}:\mathbb{K}] = [\mathbb{M}:\mathbb{L}] \cdot [\mathbb{L}:\mathbb{K}]$

Définition 44 : (élément algébrique, transcendant)
Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension et soit $\alpha \in \mathbb{L}$. Soit $\varphi : \mathbb{K}[T] \to \mathbb{L}$ l'homomorphisme défini par $\varphi_{|\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}}$ et $\varphi(T) = \alpha$.
Si φ est injective, on dit que α est transcendant sur $\mathbb{K}$. Sinon, α est dit algébrique sur $\mathbb{K}$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple 45 : e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$. $\sqrt{2}$ et i sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 46 : (Caractérisation d'un algébrique).
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. Pour $\alpha \in \mathbb{L}$ on a :

$$\alpha \text{ est algébrique} \Leftrightarrow \mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha) \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\alpha) < +\infty.$$

Références :

- J'intègre MP-MP*
- X G Maths en tête Algèbre et Analyse
- Mathématiques pour l'agrégation (Algèbre et géométrie) Rombaldi.
- Cours d'Algèbre Daniel Perrin.
- J. Grifone Algèbre linéaire (pour les preuves).