102 : Groupe des nombres complexes de module 1, sous groupe des racines de l'unité. Applications

I Nombres complexe de module 1

A Un groupe 6.7 Ann

Proposition 1 : L'application $|\cdot| : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes.

Définition 2 : On note $\mathbb{U}$ le noyau de ce morphisme

Exemples 3 : i, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \in \mathbb{U}$

Remarque 4 : · Il s'agit donc d'un groupe
· $\mathbb{U} \simeq S^1$.

Théorème 5 : $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$, $(r,u) \mapsto ru$ est un isomorphisme de groupes.

Théorème 6 : $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} \in \mathbb{U}$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 7 : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$.

B Applications trigonométriques 6.7 Ann

Définition 8 : On définit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin z = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Remarque 9 : on a $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Proposition 10 (Formule de Moivre) : $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Proposition 11 (Formules d'Euler) : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Exemples 12 : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Application 13 : calculs des noyaux de Dirichlet, Fejer

Proposition 14 : $\cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}$

Proposition 15 : $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ avec T_n le n-ième polynôme de Tchebychev.

C Paramétrisation du cercle unité 12.7 Com

Proposition 16. $\exists (x,y,z) \in \mathbb{N}^3, x^2+y^2=z^2 \iff \exists (X,Y) \in \mathbb{Q}^2$
$X^2+Y^2=1$

$\mathbb{R} \to \mathbb{U} \setminus \{(-1,0)\}$

Théorème 17 : $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ est une bijection.

Remarque 18 : Elle se prolonge sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en envoyant $(-1,0)$ à ∞.

Application 19 : Les points de $\mathbb{U} \setminus \{(-1,0)\}$ à coordonnées rationnelles sont de la forme $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{Q}$.

Application 20 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ alors $x^2+y^2=z^2 \iff$
$\exists (d,u,v) \in \mathbb{N}^3$, $u \wedge v = 1$, $x = d(u^2-v^2)$
$y = 2duv$, $z = d(u^2+v^2)$.

D Mesure d'un angle orienté 3.1 Aud 6.8 Com

Proposition 21 : Soit $(u,v) \in (S^1)^2 \simeq \mathbb{U}^2$, alors il existe une unique rotation $r \in SO(\mathbb{R}^2)$ tel que $r(u) = v$.

Exemple 22 : La rotation entre i et 1 est donnée par
$z \mapsto e^{i\frac{\theta}{2}} z = iz$ car la rotation entre $\binom{0}{1}$ et $\binom{-1}{0}$ est donnée par
$\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\binom{x}{y}$

Remarque 23 : C'est faux en dimension 3.

Définition 24 : $(u,v) R (u',v') \Leftrightarrow$ il existe une rotation r telle que $r(u) = u'$, $r(v) = v'$.

Proposition 25 : R est une relation d'équivalence

Définition 26 : L'angle orienté de u à v est la classe d'équivalence de (u,v), on note A leur ensemble.

Proposition 27 : $(u,v) \in A \mapsto r \in SO(\mathbb{R}^2)$ est une bijection.

Corollaire 28 : A est muni d'une structure de groupe.

Proposition 29 (Relation de Chasles) : $(u,v) + (v,w) = (u,w)$.

II Racines de l'unité et utilisations

A Sous groupe des racines de l'unité Per 3.4

Définition 30 : L'ensemble des racines de l'unité dans k un corps est $\mu_n(k) = \{u \in k,\ u^n = 1\}$.

Proposition 31 : $\mu_n(k)$ est un sous groupe de k^*, de cardinal $\leq n$ donc cyclique.

Proposition 32 : $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto e^{\frac{i2k\pi}{n}} \in \mu_n$ est un isomorphisme de groupes.

Définition 33 : On note $K_n = D_k(P_n)$ corps de décomposition de P_n sur k. Une racine $n$ième primitive de l'unité est un élément $u \in K_n$ tel que $u^n = 1$ et $u^d \neq 1$ $\forall d | n$. Autrement dit u génère $\mu_n(K_n)$ de sorte qu'il y a $\varphi(n)$ racines primitives de l'unité, On note $\mu_n^*(K_n)$ leur ensemble.

B Polynômes cyclotomiques

Définition 34 : Le $n$ième polynôme cyclotomique $\Phi_{n,k} \in K_n[X]$ est donné par la formule :

$$\Phi_{n,k}(X) = \prod_{u \in \mu_n^*(K_n)} (X - u).$$

Remarques 35 : i) Si u est une racine $n$ième primitive de l'unité, les autres sont les u^m avec $m \wedge n = 1$

ii) $\Phi_{n,k}$ est unitaire de degré $\varphi(n)$.

Proposition 36 : $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Remarque 37 : En comparant les degrés on retrouve $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

Exemple 38 : $\Phi_1(X) = X - 1$, $\Phi_2(X) = X + 1$, ...

Théorème 39 (Wedderburn) Tout corps fini est commutatif.

$\boxed{\text{Développement}}$ $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ $\forall n$.

C Application aux suites de polygones. J'int X. G

Définition 40 : Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on appelle isobarycentre de $(z_1, \dots, z_n)$ le complexe $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \in \mathbb{C}$.

Définition 41 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$ alors $\det A$ est appelé déterminant circulant des a_i.

Proposition 42 : $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} \omega^{lk}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $P^0 = (z_1, \dots, z_n)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P^{k+1} = \left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}, \dots, \frac{P_n^k + P_1^k}{2}\right)$ alors $P^k \to (g, \dots, g)$ où g = isobar P.

Références :

- Algèbre Arnaudiès Arn
- Algèbre et géométrie François Combes Com
- Géométrie Audin Aud
- Cours d'Algèbre Perrin Per
- J'intègre MP-MP* J'int
- X.G Algèbre.