101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications

Soit $(G,.)$ un groupe et E un ensemble non vide

I Actions de groupes

A Définitions et premières propriétés Rom 1.6 Per pour la rem 2

Définition 1: On dit que G opère à gauche sur E si on a une application $G\times E \to E$, $(g,x)\mapsto g.x$ telle que $\begin{cases} \forall x\in E, & 1.x = x \\ \forall (g,g',x)\in G^2\times E, & g.(g'.x)=(gg').x \end{cases}$

Remarque 2: Il revient au même de se donner un homomorphisme $\phi : G \to S(E)$ en posant $\phi(g)(x) = g.x$
Lorsque $\forall (g,g',x)\in G^2\times E$, $(x.g).g' = x.(gg')$ on parle d'action à droite.

Exemple 3:
- G opère sur lui-même par translation à gauche : $(g,h)\in G\times G \mapsto g.h = gh$.
- G agit sur lui-même par conjugaison : $(g,h)\in G\times G \mapsto g.h = ghg^{-1}$. Le morphisme de groupes correspondant de $(G,.)$ dans $(S(G),\circ)$ est noté $Int(g) : G \to G$. L'image de ce morphisme est $Int(G)$, le groupe des automorphismes intérieurs de G. $h \mapsto ghg^{-1}$.
On remarque que G agit sur tout sous groupe distingué H par conjugaison.
- $S(E)$ agit naturellement sur E par : $(\sigma,x)\in S(E)\times E \mapsto \sigma.x = \sigma(x) \in E$.

Définition 4: Soit G opérant sur E.
- Pour $x\in E$ on appelle orbite de x et on note $O(x)$ l'ensemble $G.x = \{g.x, g\in G\}$
- On dit que l'action transitive (resp simplement transitive) si :
$\forall (x,y)\in E^2, \exists g\in G, y = g.x$ (resp. $\forall (x,y)\in E^2, \exists ! g\in G, y = g.x$).
- On dit que l'action est fidèle si ϕ est injective.

Remarque 5. Dans le cas d'une action transitive ou simplement transitive, il y a une seule orbite.

Exemple 6: Pour l'action de G sur lui-même par conjugaison, les orbites sont appelées classes de conjugaison. $\forall h\in G$, $G.h = \{ghg^{-1}, g\in G\}$.
- Une action fidèle permet d'identifier G à un sous groupe de $S(E)$.

Théorème 7 (Cayley) L'action de G sur lui-même par translation à gauche est fidèle et G est isomorphe à un sous groupe de $S(G)$.

B Action d'un groupe sur un ensemble fini Rom 1.6 exo 1.18

On considère . une action de G sur E.

Définition 8: On appelle stabilisateur de $x\in E$ le groupe $Stab(x) = \{g\in G, g.x = x\}$
On dit que G opère librement sur E si $Stab(x) = \{e\}$ pour tout $x\in E$.
On appelle fixateur de $g\in G$ l'ensemble $Fix(g) = \{x\in E, g.x = x\}$.

Exemple 9: En faisant agir $G = S(E)$ sur E non réduit à un point par $\sigma.x = \sigma(x)$ le stabilisateur de $x\in E$ est isomorphe à $S(E\setminus\{x\})$. À $\sigma\in G_x$, on associe la restriction σ' de σ à $E\setminus\{x\}$, ce qui définit un isomorphisme de G_x sur $S(E\setminus\{x\})$.

Proposition 10: Pour $x\in E$: $\varphi_x : \begin{array}{ccc} G/G_x & \to & G.x \\ \bar{g} = gG_x & \mapsto & g.x \end{array}$ est bien défini et bijective. Si G est fini on a $|O(x)| = [G:G_x] = |G|/|G_x|$ (en particulier $|O(x)|$ divise $|G|$).

Corollaire 11 (équation des classes) En notant $G.x_1, \dots, G.x_n$ toutes les orbites deux à deux distinctes on a $|E| = \sum_{i=1}^{n} |O(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$

Application 12: Soit G d'ordre 33 opérant sur E de cardinal 19, alors l'action admet forcément des points fixes.

Corollaire 13 (Formule de Burnside) : $|O| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |Fix(g)|$

Application 14: On peut colorier les six faces (toutes identiques) d'un cube avec trois couleurs de 57 manières différentes.

Théorème 15 (Cauchy) Si G est un groupe fini d'ordre $m \geq 2$ alors pour tout diviseur premier p de m, il existe dans G un élément d'ordre p (et donc un sous groupe d'ordre p).

II Actions d'un groupe sur un groupe

A Action par translation Per 1.3

Définition 16: G opère sur lui-même par translation à gauche en posant
$G\times G \to G$, $(g,a)\mapsto ga$

Proposition 17: Cette action est simplement transitive et fidèle.

Application 18: Théorème de Lagrange : Si H est un sous groupe fini de G fini alors $|G| = |H| [G:H]$.
Théorème de Cayley.

Prop-def 19: Soit H un sous groupe de G. Alors G opère sur G/H par translation en posant pour tout g et a dans G, $g \cdot (aH) = gaH$.

Proposition 20: Cette action est transitive et pour tout $a \in G$, $Stab(aH) = aHa^{-1}$

Remarque 21: L'action n'est pas fidèle en général, si $\varphi : G \to S(G/H)$ est le morphisme associé, on a $\ker \varphi = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$

Application 22: Soit G un groupe infini et H un sous groupe de G distinct de G d'indice fini. Alors G n'est pas simple.

B Action par conjugaison   Per 1.3

Définition 23: G opère sur lui même par conjugaison en posant :
$$G \times G \to G, \quad (g,a) \mapsto gag^{-1}.$$

Définition 24: Les orbites s'appellent alors classes de conjugaison et si $a' = gag^{-1}$, a' est un conjugué de a.
Le stabilisateur de a s'appelle centralisateur noté $C_G(a) = \{g \in G, ga = ag\}$.

Remarque 25: Pour G non trivial, l'action n'est pas libre.
En effet $a \in Stab(a) \neq \{e\}$ pour $a \neq e$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (Wedderburn) Tout corps fini est commutatif.

C Application aux théorèmes de Sylow   Per 1.5

Définition 26: Soit G un groupe de cardinal $p^\alpha m$, $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \wedge m = 1$
On appelle p sous groupe de Sylow de G tout sous groupe de cardinal p^α.
On appelle p groupe un groupe dont le cardinal est une puissance de p.

$\boxed{\text{Développement}}$ G contient au moins un p sous groupe de Sylow pour tout p premier qui divise $|G|$

Corollaire 27: Si $|G| = p^\alpha m$, $p \nmid m$ G contient des sous groupes d'ordre p^i $\forall i \leq \alpha$.

Théorème 28 (Sylow) Soit G un groupe tel que $|G| = p^\alpha m$, $p \nmid m$.
i) Si H est un sous groupe de G qui est un p groupe, il existe un p Sylow S avec $H \subset S$.
ii) Les p Sylow sont tous conjugués (et donc leur nombre k divise m)
iii) On a $k \equiv 1 [p]$ (et donc k divise m)

Remarque 29: $k | m$ car les p Sylow forment une orbite sous G.

Corollaire 30: Si S est un p Sylow de G on a :
$S \triangleleft G \iff S$ est l'unique p Sylow de $G \iff k = 1$

Application 31: Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

Application 32: L'unique sous groupe simple G d'ordre 60 est le groupe A_5 (à isomorphisme près).

III Actions de groupes et algèbre linéaire

A Action de Steinitz   I.2 I.4 N LH 2G

Définition 33: Soit $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$. On appelle action de Steinitz l'action de G sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par
$$\alpha : \begin{array}{l} G \times M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q),A) \mapsto (P,Q) \cdot A = PAQ^{-1} \end{array}$$

Théorème 34: Deux matrices A et B de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite sous l'action de Steinitz si et seulement si elles ont le même rang.

Propriété 35: Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Pour r entiers satisfaisants à $0 \leq r \leq \min(m,n)$ on note O_r l'orbite des matrices $m \times n$ de rang r à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors l'adhérence $\overline{O_r}$ est donnée par $\overline{O_r} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} O_k$.

Corollaire 36: L'unique orbite fermée est l'orbite de la matrice nulle, dite « minimale » $O_0 = \{0\}$.
L'unique orbite ouverte est l'orbite dite « maximale » $O_{\min(m,n)}$. En particulier, si $m = n$, le groupe des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.

B Action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $D_n(\mathbb{C})$ II.1 N2H2G

<u>Définition 37</u> : Soit $A \in D_n(\mathbb{C})$. On appelle classe de similitude de A son orbite pour l'action de conjugaison par $GL_n(\mathbb{C})$ notée $O_A = \{PAP^{-1},\ P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

<u>Propriété 38</u> : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si son orbite O_A sous $GL_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.

C Action de congruence de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $S_n(\mathbb{C})$ V.1 et V.C N2H2G

<u>Définition 39</u> : L'action de congruence est l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices symétriques $n \times n$ définie par :

$$\forall P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \forall A \in S_n(\mathbb{C}) \quad P.A = PA\,{}^tP.$$

<u>Définition 40</u> : On dit que deux matrices $A, A' \in S_n(\mathbb{K})$ sont congruentes si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de congruence.

<u>Théorème 41</u> :
- $A, A' \in S_n(\mathbb{C})$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même rang ;
- $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$, alors $Orb(A) = Orb(A') \iff rg\,A = rg\,A'$ et $p(A) = p(A')$ (même invariant p).
- $A, A' \in S_n(\mathbb{F}_{2k+1})$, $Orb(A) = Orb(A') \iff$ discriminant$(A) =$ disc(A').

Application 42 : Loi de réciprocité quadratique.
Soient p, q deux nombres premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Références :

Rombaldi Mathématiques pour l'agrégation Rom

Daniel Perrin Cours d'Algèbre Per

Caldero tome I N2H2G