UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACITÉ

203

On considère (E, d) un espace métrique.

I _ RAPPELS SUR LA COMPACITÉ

a) Propriété de Borel-Lebesgue

<u>Def 1</u> : (E, d) est dit compact si, de tout recouvrement d'ouverts

$E = \bigcup_{i \in I} O_i$ (O_i ouverts de E), on peut extraire un sous-recouvrement

fini, ie il existe n tel que $E = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$.

<u>Exemples 2</u> : $\mathbb{R}$ n'est pas compact. $\emptyset$ est compact.

<u>Prop 3</u> : Si $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact E, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

<u>Prop 4</u> : Une partie $A \subseteq E$ est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A avec des ouverts de E, il existe un sous-recouvrement fini :

$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ (O_i ouverts de E) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$.

<u>Prop 5</u> : Une réunion finie de parties compactes est compacte.

<u>Prop 6</u> : Une intersection de compacts est compact.

b) Propriété de Bolzano-Weierstraß

<u>Thm 7</u> : (E, d) est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

<u>Exemple 8</u> : Tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

<u>Prop 9</u> : Un espace métrique compact est complet.

<u>Prop 10</u> : Soient $(E_1, \dots, E_n)$ des espaces métriques.

$E_1 \times \dots \times E_n$ est compact si et seulement si, pour tout i, E_i est compact.

<u>Ex 11</u> : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

II _ FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT

a) Recherche d'extrema

<u>Prop 12</u> : Soient (F, δ) un espace métrique, $f : E \to F$ une application continue.

Si E est compact, alors $f(E)$ est compact.

<u>Rem 13</u> : Faux pour l'image réciproque : $\mathbb{R} = \sin^{-1}([-1, 1])$.

<u>Thm 14</u> : Soient (E, d) compact, $f : (E, d) \to \mathbb{R}$ une application continue.

Alors il existe $c, d \in E$ tels que :

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \qquad f(d) = \sup_{x \in E} f(x).$$

<u>Application 15</u> : La distance entre un fermé et un compact disjoints d'un espace métrique est non nulle.

<u>Rem 16</u> : Faux sans la compacité :

$K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\}$ sont fermés, disjoints, mais de distance nulle.

<u>Application 17</u> : Dans $\mathbb{R}^n$, la distance entre un fermé et un compact est atteinte.

<u>Rem 18</u> : Faux en dimension infinie :

Dans $E = (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \|\cdot\|_\infty)$, on considère $F = \{(x^n)_n\}$ où $x^n = (1 + \frac{1}{2^n}\delta_{mn})_m$

et $K = \{0\}$. Alors $d(K, F) = 1$ mais $d(K, (x^n)_n) > 1$ pour tout n.

<u>Thm 19</u> : [Rolle]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>Application 20</u> : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, alors P' est scindé.

<u>Application 21</u> : [Théorème des accroissements finis]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$.

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

DEV1

b) Uniforme continuité, convergence uniforme

Thm 22 : [Heine]
Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, E étant compact, $f : E \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.

Application 23 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue en dehors d'un compact.
Soit (a_n) une suite de fonctions positives de $\mathcal{E}_c(\mathbb{R};\mathbb{C})$ vérifiant
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} a_n(t)\,dt = 1$ et $\forall \eta > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geq \eta} a_n(t)\,dt = 0$.

Alors $(f * a_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Thm 24 : [Weierstraß]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. Alors f est limite uniforme de suites de fonctions polynomiales.

Prop 25 : [Dini]
Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de $C(E,\mathbb{R})$, avec E compact, qui converge simplement vers $f \in C(E,\mathbb{R})$.
Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Exemple 26 : La suite $(P_n)_n$ définie par $\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x)) \end{cases}$

converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Def 27 : Une partie H de $C(E)$ est dite séparante si pour tout couple $(x,y) \in E^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$.

Thm 28 : [Stone-Weierstraß]
Soit E compact. Toute sous-algèbre de $C(E,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(E,\mathbb{R})$.

Exemple 29 : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Application 30 : [critère de Weyl]
Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1, i.e.
$\frac{\#\{1 \leq n \leq N,\ \langle u_n \rangle \in [a,b[\}}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} b-a$ pour tout $[a,b[\subset [0,1]$
si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i p u_k} = 0$.

Exemple 31 : La suite $(ny)_{n \in \mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1 si et seulement si $y \notin \mathbb{Q}$.

III_ COMPACITÉ DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans cette partie, E est un espace vectoriel normé.

a) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Thm 32 : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

DEV2

Corollaire 33 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
1) Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé est continue.
2) E est complet.
3) Tout sous-espace vectoriel de E est fermé.
4) Les parties compactes de E sont ses fermés bornés.

Thm 34 : [Riesz]
E est de dimension finie $\iff$ $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte.

DEV2

b) Compacts de $C(E)$

On suppose E compact, E muni de la norme $\|\cdot\|$.

<u>Déf 35</u> : Une partie H de $C(E)$ est :

- équicontinue en $x_0 \in E$ si
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon.$
- équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.
- relativement compacte si $\overline{H}$ est compacte.

<u>Thm 36</u> : [Arzelà-Ascoli]
Une partie de $C(E)$ est relativement compacte dans $C(E)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

<u>Exemple 37</u> : Soient X, Y deux espaces métriques compacts, $K \in C(X \times Y)$, μ de masse finie.
On pose l'opérateur $T : C(Y) \to C(X)$:

$$\forall f \in C(Y), \forall x \in X, \quad Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y) \, d\mu(y).$$

Alors l'image par T de la boule unité fermée de $C(Y)$ est une partie relativement compacte de $C(X)$.