Transformation de Fourier. Applications

I Transformation de Fourier

A Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ [Li 3.2.1 + exos] [ELA 3.1]

DÉFINITION 1 : [TRANSFORMATION ET TRANSFORMÉE DE FOURIER]
On appelle transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction

$$\mathcal{F}f = \hat{f} : y \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy} dx$$

La transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ est l'application linéaire :

$$\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f}$$

EXEMPLE 2 : $\hat{\mathbb{1}_{[0,1]}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ e^{-i\pi y} \frac{sin(\pi y)}{\pi y} & \text{sinon.} \end{cases}$

DÉVELOPPEMENT : [TRANSFORMATION DE FOURIER DE LA GAUSSIENNE]
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-u^2}{4a}}$

THÉORÈME 3
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}), lim_{|x| \to +\infty}(x) = 0\}$

REMARQUE 4
C'est l'analogue du lemme de Riemann-Lebesgue pour les séries de Fourier.

THÉORÈME 5
Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$

REMARQUE 6
Autrement dit $\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'algèbres. C'est l'un des grands intérêts de la transformation de Fourier. En effet, la convolution régularise les fonctions mais n'est pas facile à calculer ; un passage "du côté Fourier" simplifie souvent.

COROLLAIRE 7
L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.

REMARQUE 8
Il existe en fait bien une unité pour la convolution mais elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

COROLLAIRE 9
L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est continue de norme 1.

B Le théorème d'inversion [Li 3.2.2 + exos]

THÉORÈME 10 : [THÉORÈME D'INVERSION]
Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors f est presque partout égale à la fonction g définie par $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy$

APPLICATION 11 : Si $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ alors $\hat{f}(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}$ et $\mathcal{F}(\frac{1}{1+x^2})(t) = \pi e^{-2\pi|t|}$.

THÉORÈME 12 : [INJECTIVITÉ DE LA TRANFORMATION DE FOURIER]
La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

REMARQUE 13
$\mathcal{F}$ n'est pas surjective.

THÉORÈME 14
L'ensemble $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$.

C Application aux polynômes orthogonaux [BMP 3.1.5 + exos]

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 15 : [FONCTION POIDS]
On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.
On note $L^2(I, \rho) = \{f : I \to \mathbb{C}, < f, f >_\rho < +\infty\}$ où $< f, g >_\rho = \int_I f(x)\bar{g}(x)\rho(x)dx$ produit scalaire.

PROPOSITION 16
$(L^2(I, \rho), < ., . >_\rho)$ est un espace de Hilbert.

THÉORÈME 17
Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux tels que $deg P_n = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.

EXEMPLE 18 : i) Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on appelle polynôme de Hermite :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - \frac{1}{2}, ..., P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

i) Pour $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$, on appelle polynôme de Legendre :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - \frac{1}{3}, ..., P_n = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

DÉVELOPPEMENT : [DENSITÉ DES POLYNÔMES]
Soit ρ une fonction poids sur I. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

REMARQUE 19
L'hypothèse sur ρ est cruciale. Pour $I = \mathbb{R}_+^*$, $w(x) = x^{-ln(x)}$, la famille des polynômes orthogonaux associée à w ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

II Prolongement de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$

A Résultats préliminaires de densité [Li 3.2.3]

DÉFINITION 20 On note $A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$.

EXEMPLE 21 : pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^{-ax^2} \in A(\mathbb{R})$

LEMME 22
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)dy$.

PROPOSITION 23
On a :
i) Si $f \in A(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in A(\mathbb{R})$;
ii) Si $f \in A(\mathbb{R})$, alors f et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$;
iii) $A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;
iv) Si $f \in A(\mathbb{R})$, alors $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$;
v) $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $||.||_2$.

B Théorème de Plancherel et conséquences [Li 3.2.3]

THÉORÈME 24 [THÉORÈME DE PLANCHEREL]
La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se prolonge, de façon unique, en un isomorphisme d'espaces de hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

PROPOSITION 25
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2\pi ixy}dx$.
Alors $lim_{A\to+\infty}||\varphi_A - \hat{f}||_2 = 0$.

PROPOSITION 26
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy$.
Alors $lim_{A\to+\infty}||\psi_A - f||_2 = 0$.

COROLLAIRE 27
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

EXEMPLE 28 : Pour $f(x) = \frac{sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}$ on a $\hat{f}(y) = \frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda](y)}$

III Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

A Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide [ELA 3.3]

DÉFINITION 29 [FONCTION À DÉCROISSANCE RAPIDE]
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide (à l'infini) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$lim_{||x||\to+\infty}|x^\alpha f(x)| = 0,$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 30 : La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 31
Contrairement à ce que laisse suggérer son nom, la définition ci-dessus n'implique aucune monotonie pour f, même dans un voisinage de l'infini comme le montre $f(x) = e^{-|x|}sin(x)$.

PROPOSITION 32
i) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
ii) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

REMARQUE 33
Les résultats ci-dessus montrent en particulier que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide, il en est de même pour $\hat{f}$. En revanche, on notera par exemple que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}cos(e^{2x^2})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide mais que sa dérivée n'est pas à décroissance rapide.

B L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [ELA 3.3] [Li 10.5]

DÉFINITION 34 [ESPACE DE SCHWARTZ]
On appelle espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace des fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que :
i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
ii) f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

REMARQUE 35
Les élements de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et tendent vers 0 à l'infini, de même que leurs dérivées.

EXEMPLE 36 : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^{-ax^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 37
i) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, produit, multiplication par un polynôme et par transformation de Fourier.
iii) Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
$\hat{f}^{(k)}(y) = \hat{f}_k(y)$ où $f_k(x) = (-2\pi i x)^k f(x)$ et $\widehat{f^{(n)}}(y) = (2\pi i y)^n \hat{f}(y)$.

THÉORÈME 38
La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.

IV Applications

A L'équation de Laplace [ELA 3.6.1]

DÉFINITION 39 [ÉQUATION DE LAPLACE]
On appelle équation de Laplace dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$u'' - u = \varphi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

THÉORÈME 40
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'équation de Laplace admet une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donnée par la fonction $x \mapsto C.\mathcal{F}(\frac{-\hat{\varphi}(y)}{1+y^2})(-x)$.

B L'équation des cordes vibrantes [ELA 3.6.3]

THÉORÈME 41
On considère l'équation des cordes vibrantes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial x}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On supppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, et que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $g' \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ au problème donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds.$$

C Formule sommatoire de Poisson [X.G 4.6]

THÉORÈME 42 [FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi n x} \text{ où } \forall n \in \mathbb{Z},\ f^*(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

APPLICATION 43 : $\forall s > 0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-\pi k^2}{s}}$
On pourra utiliser que $\forall x \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi t x} dt = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$.

Références :

[Li] Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle

[BMP] Beck Malick Peyré Objectif agrégation

[ELA] El Amrani Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

[X.G] Xavier Gourdon "les maths en tête" Analyse