148 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

I Algèbre linéaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

A Rappels sur l'étude d'endomorphismes [J'int 2.2 2.5]

DÉFINITION 1 : [POLYNÔME MINIMAL]
Soit $I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\}$. C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ principal donc il existe un unique $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $I = (P)$. Le polynôme s'apelle le polynôme minimal de u. On le note π_u.

EXEMPLE 2 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $q \geq 1$ si et seulement si $\pi_u(X) = X^q$.

THÉORÈME 3
L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale à $d = d\pi_u$, une base étant donnée par $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$

PROPOSITION 4
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $ker(v)$ et $Im(v)$ sont stables par u. En particulier pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $Im(P(u))$ et $ker(P(u))$ sont stables par u.

LEMME 5 [LEMME DE DÉCOMPOSITION DES NOYAUX]
Soient $(P_1, ..., P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$ une famille finie de polynômes deux à deux premiers entres eux et $P = P_1...P_r$ leur produit. On a alors la décomposition en somme directe :

$$kerP(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} kerP_k(u)$$

DÉFINITION 6 : [POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE]
On appelle polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(X) = det(X.I_n - A)$.

REMARQUE 7
Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on définit le polynôme caractéristique de u comme celui d'une de ses matrices.

EXEMPLE 8 : En dimension 2, $\chi_u(X) = X^2 - tr(u)X + det(u)$.

PROPOSITION 9
$\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$.

THÉORÈME 10 [CAYLEY - HAMILTON]
π_u divise χ_u ou encore $\chi_u(u) = 0$.

B Diagonalisation, trigonalisation [BMP 4.2.3]

DÉFINITION 11 : [DIAGONALISABLE]
On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

THÉORÈME 12 : [CRITÈRES DE DIAGONALISATION]
On a équivalence entre :
i) u est diagonalisable ;
ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ;
iii) π_u est scindé à racines simples ;
iv) χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $dim(E_\lambda) = m(\lambda)$ en tant que racine de χ_u.

DÉFINITION 13 : [TRIGONALISABLE]
On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

THÉORÈME 14 : [CRITÈRES DE TRIGONALISATION]
On a équivalence entre :
i) u est trigonalisable ;
ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé ;
iii) π_u est scindé ;
iv) χ_u est scindé.

REMARQUE 15
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

C Décomposition de Dunford [X.G 4.4] [Rom 19.8]

PROPOSITION 16
Soit $\chi_u = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ de χ_u. Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$ on note $N_i = kerM_i^{\alpha_i}(u)$. On alors $E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$ et pour tout i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

DÉVELOPPEMENT : [DÉCOMPOSITION DE DUNFORD]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :
i) d diagonalisable, u nilpotente
ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

APPLICATION 17 : u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable.

EXEMPLE 18 : $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

APPLICATION 19 : L'exponentielle de matrice réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

II Autour de la décomposition polaire

Soit $(E, <.,.>)$ un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

A Endomorphismes symétriques et théorème spectral [Rom 22.6 22.7 22.9]

DÉFINITION 21 : [ENDOMORPHISME SYMÉTRIQUE]
On dit que u est dit symétrique lorsque : $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >=< x, u(y) >$.
On note $S(E)$ l'ensemble des endormorphismes symétriques de E.
On note $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tA = A\}$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques d'ordre n.

THÉORÈME 21
$u \in S(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

LEMME 22
Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

LEMME 23
On suppose que $n \geq 2$. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in S(E)$ alors les sous espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

THÉORÈME 24 [THÉORÈME SPECTRAL]
Tout endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

COROLLAIRE 25
Toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

THÉORÈME 26 [ORTHODIAGONALISATION SIMULTANÉE]
Soit $(u_i)_{i\in I} \in S(E)$ où $card(I) \geq 2$. Il existe une base orthonormée commune de diagonalisation dans E pour la famile $(u_i)_{i\in I}$ si et seulement si ces endomorphismes commutent deux à deux.

COROLLAIRE 27
Soit $(A_i)_{i\in I} \in S_n(\mathbb{R})$ où $card(I) \geq 2$. Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si et seulement si ces endomorphismes commutent deux à deux.

B Décomposition polaire [Rom 22.8 22.9

DÉFINITION 28 : $[S_n^+(\mathbb{R}), S_n^{++}(\mathbb{R})]$
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive [resp définie positive] si elle est symétrique avec $< x, Ax >\geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ [resp $< x, Ax >> 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$]. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ [resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$] ces ensembles.

THÉORÈME 29
Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ [resp $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$], $\exists! B \in S_n^+(\mathbb{R})$ [resp $\exists! B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$] telle que $A = B^2$.

COROLLAIRE 30
Toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$, $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

LEMME 31
$O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DÉVELOPPEMENT : [DÉCOMPOSITION POLAIRE]
L'application $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

C Applications [Rom 22.9 + exos] [Cal 6.1 + exos]

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $||.||$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 32 : [RAYON SPECTRAL]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) = max_{\lambda \in Sp(A)}|\lambda|$.

LEMME 33
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $||A|| = \rho(A)$.

THÉORÈME 34
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $||A|| = \sqrt{||tAA||} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

THÉORÈME 35
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact et que si G est un sous groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 36
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^-$ sont connexes.

III Applications à la résolution de systèmes linéaires

A Décomposition LU et Cholesky [Cia 4.3]

Soit $(A,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$. On souhaite résoudre $Ax = b$.

THÉORÈME 37 [DÉCOMPOSITION LU]
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que les n sous matrices diagonales $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$, $k \in [\![1,n]\!]$ soient inversibles.
Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.
De plus, une telle factorisation est unique.

REMARQUE 38
Un cas important où les conditions d'application du théorème précédent se trouvent vérifiées est celui où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 39 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 17 \\ 3 & 20 & 41 \end{pmatrix}$

APPLICATION 40 : Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Ly = b$ puis $Ux = y$ avec $A = LU$.

THÉORÈME 41 [DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY]
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = {}^tBB$.
De plus on peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice B soient tous > 0, et la factorisation $A = {}^tBB$ correspondante est alors unique.

APPLICATION 42 : Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors résoudre $Au = b$ revient à résoudre $Bw = b$ puis ${}^tBu = w$ avec $A = B^tB$.

REMARQUE 43
Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$.

B Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires [Cia 5.1 5.2 5.3]

DÉFINITION 44 : [DÉCOMPOSITION RÉGULIÈRE]
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On appelle décomposition régulière tout couple $(M,N) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$.
Une méthode itérative basée sur une décomposition régulière (M,N) est :
$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$, $k \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in \mathbb{K}^n$ un vecteur arbitraire.

DÉFINITION 45 : [CONVERGENCE]
On dit que la méthode itérative converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{K}^n$, $u_n \to u$ où $Au = b$.

THÉORÈME 46
On a équivalence entre :
i) la méthode itérative est convergente ;
ii) $\rho(M^{-1}N) < 1$;
iii) $||M^{-1}N|| < 1$ pour au moins une norme matricielle $||.||$.

THÉORÈME 47
Soit A une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme $A = M - N$; $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Si la matrice hermitienne $(M^* + N)$ est définie positive alors : $\rho(M^{-1}N) < 1$.
(On rappelle que $M^* = {}^t\overline{M}$)

<u>Références</u> :

[J'int] J'intègre MP - MP*

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie Jean-Etienne Rombaldi

[BMP] Objectif Agrégation Beck Malick Peyré

[Cal] Caldero N2H2G Tome 1

[Cia] P. Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation