250 : Transformation de FOURIER. Applications.

Cadre : $d \in \mathbb{N}^*$

I) Transformée de FOURIER dans L^1

A) Définitions, propriétés

Définition de la transformée de FOURIER, alternative. Opérateur $\mathcal{F}$. Exemples. Propriétés via une translation, modulation et homothétie. Formule de dualité.

B) Convolution

L'algèbre commutative $(L^1, ||.||_1)$, approximation de l'unité, exemples. Théorème d'approximation. **DEV** 1 : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER. Application.

C) Formule d'inversion

Théorème, application. Automorphisme de l'algèbre de WIENER.

II) Extension de la transformée de FOURIER

A) Théorème de FOURIER-PLANCHEREL

Formule de PLANCHEREL-PARSEVAL, applications. Densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2. Opérateur de FOURIER-PLANCHEREL $\mathcal{P}$. Théorème.

B) Espace de SCHWARTZ

Définition, exemple, propriétés. Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'isomorphisme bicontinue de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

C) Transformée de FOURIER holomorphe

Extension de la transformée de FOURIER à un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. **DEV** 2 : THÉORÈME DE PALEY-WIENER

III) Applications

A) Base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

Définition d'une fonction poids, de $L^2(I, \rho)$, théorème d'existence d'une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

B) Aux équations différentielles

Équations de LAPLACE, problème de DIRICHLET DANS LE DEMI-PLAN SUPÉRIEUR.

ANNEXES : Exemples de noyaux, fonctions classiques et leur transformée.

Références :

- AMRANI
- BECK-MALICK-PEYRÉ