213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

Définition, exemple de ℓ^2. Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Application. Caractérisation des espaces préhilbertiens. Théorème de GRAM-SCHMIDT, exemple.

II) Conséquences de la projection

DEV 1 : PROJECTION + RIESZ-FRÉCHET. L'application projection. Cas de la projection sur un sous-espace fermé. Cas de la dimension finie. Critère de densité. Applications.

III) Bases hilbertiennes

A) Définition, propriété

Définition, existence dans un espace de HILBERT séparable. Exemples. Caractérisation des bases hilbertiennes.

B) Exemples

Espace $L^2(\mathbb{T})$, coefficients de FOURIER. Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. Applications. Fonctions poids et espace $L^2(I,\rho)$, exemples de polynômes orthogonaux. Théorème d'existence d'une base hilbertienne dans $L^2(I,\rho)$. Exemples.

IV) Vers les espaces de SOBOLEV

A) Théorèmes principaux

DEV 2 : THÉORÈME DE STAMPACCHIA. Lax-Milgram.

B) Espace de SOBOLEV

Définition de $W^{1,p}$, exemple. $(H^1, ||.||_1)$ est un espace de HILBERT. Définition de $H_0^1(I)$. Cas de $R = I$.

C) Problème aux limites

Problème de DIRICHLET. Définition d'une solution faible. Théorème d'existence d'une solution faibles. Application.

ANNEXES : Projections sur un convexe et sur un sous-espace fermé. HAHN-BANACH géométrique, procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT.

Références :

- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS