208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

I) Généralités

A) Définition, propriétés

Définition, normes équivalentes, cas de la dimension finie, exemples.

B) Application linéaire

Caractérisation de la continuité des applications linéaires de E dans F. L'e.v.n $\mathcal{L}_c(E, F)$. Théorème de RIESZ. Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire.

II) Espaces de BANACH

Définition, exemple. (F BANACH) $\Rightarrow$ ($\mathcal{L}_c(E, F)$ BANACH). Le sous-ensemble $\mathcal{GL}_c(E)$. Théorème de BAIRE. Applications. Théorème de BANACH-STEINHAUS, de l'application ouverte. Applications aux séries de FOURIER.

III) Espaces L^p

A) Résultats généraux

Définition de $\mathcal{L}^p$, inégalités de HÖLDER, de MINKOWSKI, l'espace vectoriel normé $(L^p, ||.||_p)$, exemples.

B) Applications

Cas des mesures finies. Théorème de RIESZ-FISHER. **DEV** 1 : INÉGALITÉ DE HARDY. **DEV** 2 : LEMME DE GROTHENDIECK. Résultat "vitrine" de l'analyse.

IV) Espaces de HILBERT

Définition, exemple de L^2, ℓ^2, projection sur un convexe fermé, cas d'un sous-espace fermé. Critère de densité d'un sev dans un HILBERT. Existence d'un adjoint. Théorème de STAMPACCHIA, application au problème de DIRICHLET.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS