206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

Cadre : (E, d) un espace métrique.

I) Espaces vectoriels normés

A) Généralités

Définition, exemple. (Dimension finie $\Rightarrow$ normes équivalentes, linéaire $\Rightarrow$ continue, complétude, sous-espace vectoriel fermé, compact = fermés bornés.) Théorème de RIESZ

B) Espaces de HILBERT

Définition, exemple de L^2. Théorème de projection sur un convexe fermé, car d'un sous-espace vectoriel de E euclidien. Propriétés de la projection. Orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

II) Espaces L^p

A) Propriétés classiques

Inégalité de HÖLDER, norme sur L^p, cas $p = \infty$, théorème de RIESZ-FISCHER.

B) Théorème de GROTHENDIECK

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré de mesure finie. Injection canonique linéaire continue. Théorème du graphe fermé. **DEV** 1 : Théorème de GROTHENDIECK. Contre-exemples sans les hypothèses.

III) Calcul différentiel

Définition d'une application différentiable. Indépendance des normes dans le cas de la dimension finie. Dérivée partielle, matrice jacobienne, exemple. Théorème d'inversion locale, application. Théorème des fonctions implicites, exemples. Utilisation de la dimension finie pour l'existence d'un minimum local strict.

IV) Équations différentielles linéaires

Définition, exemple, théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire. Structure de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire. **DEV** 2 : FAMILLES LIBRES D'APPLICATIONS.

ANNEXE : Projection sur un convexe fermé, inversion local et fonctions implicites.

Références :

- GOURDON
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- GARET-KURTZMANN
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- ROUVIÈRE
- BERTHELIN