204 : Connexité. Exemples et applications

Cadre : (E,d) un espace métrique, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

A) Caractérisation de la connexité

Définitions de la connexité. Exemples. Espace connexe par arcs. Connexe par arcs $\Rightarrow$ Connexe.

B) Propriétés

Image d'un connexe par une application continue, connexité de l'adhérence. Comportement via l'union et l'intersection

II) Composante connexe

A) Définition

Définition, relation d'équivalence. Caractère ouvert/fermé des composantes connexes. Exemples.

B) Ensembles matriciels

Définitions de $GL_n(\mathbb{K})$ et de $SL_n(\mathbb{K})$. Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$. **DEV** 1 : ÉTUDE DE $GL_n(\mathbb{C})$. Application exponentielle matricielle sur $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$. Définitions des différentds ensembles matricielles et leurs propriétés topologiques. **DEV** 2 : $SO_n(\mathbb{R})$ CONNEXE PAR ARCS + $SO_3(\mathbb{R})$ SIMPLE.

III) Analyse réelle

A) Fonction à valeurs réelles

Parties connexes de $\mathbb{R}$. Image d'un intervalle par une fonction continue. (T.V.I.) Application. Théorème de DARBOUX. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ non homéomorphes.

B) Différentielle

Définition d'une différentielle. Différentielle composée. Application. Inégalité des accroissements finis. Applications.

IV) Analyse complexe

A) Prolongement analytique

Fonction développable en série entière. Exemple. Théorèmes des zéros isolés et du prolongement analytique. Exemple et contre-exemple. Application à la fonction d'EULER.

B) Principe du maximum

Principe du maximum, passage du local au global. Application.

Références :

- GOURDON
- ROMBALDI
- CALDERO
- BECK-MALICK-PEYRÉ