203 : Utilisation de la notion de compacité

Cadre : (E,d), (F,δ) deux espaces métriques.

I) Généralités

A) Caractérisation de la compacité

Définitions, exemple. Caractérisation de la compacité. Espace précompact. Caractérisation de la compacité pour un espace complet.

B) Propriétés

Compact $\Rightarrow$ Borné-Fermé. Suite décroissante de fermés d'un compact. Comportement via l'union/intersection. Produit d'espaces compacts. Image d'un compact par une application continue, homéomorphisme, théorème de HEINE.

II) Cas de la dimension finie

Les compacts d'un e.v.n. de dimension finie. Théorème de RIESZ, théorème de ROLLE, théorème de DINI.

III) Théorème de point fixe

Différents théorèmes d'une application selon les hypothèses portées à cette dernière, exemples. Théorème de BROUWER.

IV) Application aux familles normales

Ensemble $\mathcal{C}(E,F)$. Partie équicontinue, partie relativement compacte. **DEV** 1 : ASCOLI VECTORIEL. Exemple. Partie localement bornée. Suite exhaustive de compacts d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Théorème des familles normales.

V) Application à la densité

Définitions d'une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, d'une partie séparante. **DEV** 2 : THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS. Applications.

Références :

- GOURDON
- ZULLY-QUEFFÉLEC
- HIRSH-LACOMBE