159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Généralités

A) Définitions, propriétés

Définition, exemple de la différentielle. L'espace vectoriel E^*. Isomorphisme entre E et E^*. Exemple de $M_n(\mathbb{K}) \simeq (M_n(\mathbb{K})^*)$.

B) Espaces dual et bidual

Base duale, exemple. Espace bidual. Isomorphisme entre E et E^{**}. Existence d'une base antéduale, exemple.

II) Orthogonalité

A) Définition, propriétés

Définition et propriétés de l'orthogonal. Propriétés sur les dimensions, équations d'une sous-espace vectoriel.

B) Application transposée

Application transposée, propriétés. Caractérisation de la stabilité d'un e.v. via le dual. Application. Changement de base dans le dual

C) Cas d'un espace euclidien

$(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien.

Orthogonalité via le produit scalaire. Théorème de RIESZ-FRÉCHET. Orthogonalité via le produit scalaire. Lien entre les sous-espace orthogonaux pour le produit scalaire / dualité. Existence et unicité d'un endomorphisme adjoint.

III) Applications aux formes quadratiques

A) Définitions, propriétés

Définition, base orthogonale. Théorème d'existence, exemple.

B) Classification et application

Théorème de SYLVESTER. Application. **DEV** 2 : FORMES DE HANKEL. Application.

IV) Application à la réduction d'endomorphismes

Matrice de JORDAN, espace stable par un endomorphisme. **DEV** 1 : RÉDUCTION DE JORDAN. Application à la résolution d'EDLH. Famille libre d'applications.

ANNEXES : Références :

- GOURDON
- GRIFONE
- ROMBALDI