155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

I) Généralités

A) Définitions, premières propriétés

Définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice diagonalisable. Exemple. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, lien avec ses valeurs propres, exemple. Dimension d'un espace propre.

B) Caractérisation

(χ_f scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$) $\Rightarrow$ (f diagonalisable). Caractérisation, exemple. Codiagonalisation, diagonalisation de la somme. Polynôme minimal, théorème de CAYLEY-HAMILTON, lemme des noyaux et application à la caractérisation de la diagonalisabilité, exemple. Stabilité par restriction à un sev stable.

C) Cas des corps finis

DEV 1 : CARDINAL DE $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$. Équivalent.

II) Décomposition de matrices

A) Décomposition de DUNFORD

Décomposition de DUNFORD, exemple. Application à l'exponentielle. **DEV** 2 : MORPHISMES CONTINUS DE $\mathcal{S}^1$ VERS $GL_n(\mathbb{R})$.

B) Semi-simplicité

Définition, exemple. Caractérisation, cas d'un corps algébriquement clos. DUNFORD généralisé.

III) Cas d'un espace euclidien

Endomorphisme normal, exemples. Matrice normale. Théorème de réduction des endomorphismes normaux. Application au théorème spectral, calcul de $\rho(A)$ pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

IV) Applications

A) En géométrie

Matrice circulante, suite de polygones.

B) Facteurs invariants

Forme normale se SMITH, applications.

C) Résolution d'équations différentielles

Définition de $(\mathcal{L}_H)$, existence d'une solution globale. Le sous-espace vectoriel $(\mathcal{S}_H)$. Résolution dans le cas d'une matrice diagonalisable, exemples.

ANNEXES : Tableau récapitulatif de diagonalisabilité selon les racines des polynômes, exemple d'un polygone, schéma des solutions de $\mathcal{L}_H$ dans le cas diagonalisable.

Références :

- GOURDON
- ROMBALDI
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BERTHELIN