154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : E est un K-espace vectoriel de dimension n.

I) Généralités

A) Définitions, premières propriétés

Définition d'un sous-espace stable, endomorphisme induit. Matrice triangulaire par blocs. Lien avec le polynôme caractéristique.

B) Sous-espaces cycliques

Définitions d'un sous-espace cyclique, d'une matrice compagnon, lien avec les endomorphismes cycliques. Théorème de CAYLEY-HAMILTON. Réduction de FROBENIUS. Applications.

C) Dualité

Définition du dual, bidual, propriétés, caractérisation des sous-espaces stables via la dualité.

II) Application à la réduction

A) Diagonalisation, trigonalisation

Lemme des noyaux, application à la caractérisation des endomorphismes diagonalisables et trigonalisables. Codiagonalisabilité/trigonalisabilité. Cas des corps finis : Cardinal de $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$.

B) Réductions de Dunford et Jordan

Décomposition de DUNFORD, application à l'exponentielle. Définition d'un endomorphisme semi-simple, exemple. Caractérisation dans un corps algébriquement clos **DEV** 1 : CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES. Application. Réduction de Jordan. Exemple.

C) Endomorphismes normaux

Définition, exemples. **DEV** 2 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX. Applications.

III) Application aux représentations des groupes finis

A) Définitions et propriétés

Représentation, exemples. Morphismes de représentation.

B) Décomposition en somme directe

Théorème de MASCHKE. Lemme de SCHUR.

Références :

- BECK-MALICK-PEYRÉ
- GOURDON
- ROMBALDI