151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applicatons.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I) Généralités sur la dimension finie

A) Base d'un espace vectoriel

Définitions d'une famille génératrice, libre, d'une base. Exemples. Théorème d'existence d'une base, d'extraction et de la base incomplète.

B) Théorèmes fondamentaux sur la dimension

Définition de la dimension de E, corollaires. Dimension d'un sous-espace vectoriel.

C) Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Définition, caractérisation, dimension d'une somme directe, exemples.

II) Application linéaire, dualité

Définition d'une application linéaire de E dans F, noyau et image, rang d'une application, théorème du rang. Définition de l'espace dual, isomorphisme de E^* et E, base duale, exemples. Annulateur d'un sous-espace.

III) Application aux extensions de corps

Définition d'une extension de corps. Théorème de la base télescopique. Éléments algébrique et transcendant. Caractérisation des éléments algébriques. Exemples.

IV) Application à la réduction d'endomorphismes

A) Polynôme annulateur

Existence d'un polynôme annulateur, théorème de CAYLEY-HAMILTON, lemme des noyaux, caractérisation des endomorphismes trigonalisables, diagonalisables **DEV** 1 : RÉDUCTION DE JORDAN. Semi-simplicité, caractérisation des endomorphismes semi-simples.

B) Dans un espace vectoriel euclidien

Procédé de GRAM-SCHMIDT. Définition d'un endomorphisme normal, exemples. **DEV** 2 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX. Applications.

Références :

- GRIFFONE
- PERRIN
- ROMBALDI