123 : Corps finis. Applications.

Cadre $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier

I) Construction des corps finis

A) Extension de corps, caractéristique

Définitions d'une extension, de degré, exemples. Théorème de la base télescopique. Application. Sous-corps premier, exemple, caractéristique d'un corps, homomorphisme de FROBENIUS, exemple.

B) Existence et unicité

Corps de décomposition, exemple, unicité et existence. Théorème de WEDDERBURN. Caractérisation des sous-corps, exemple.

II) Le corps $\mathbb{F}_q$

A) Le groupe $(\mathbb{F}_q)^*$

Définition, cyclicité, application aux automorphismes de $\mathbb{F}_q$.

B) Carrés de $\mathbb{F}_q$

Nombre de carrés dans $(\mathbb{F}_q)^*$ et $\mathbb{F}_q$, caractérisation d'un carré. Application à -1 et aux nombres premiers.

C) Vers la loi de réciprocité quadratique

Symbole de LEGENDRE,exemple. **DEV** 1 : LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE. Application. Racines d'un polynôme de degré 2 dans F_p, racines.

III) Quelques applications des corps finis

A) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

Réduction modulo p, exemples. Polynômes unitaires irréductibles de degré i $\mathcal{P}_p(i)$ sur F_p, $I_p(i) = Card(\mathcal{P}_p(i))$ **DEV** 2 : POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES SUR $\mathbb{F}_p$.

B) Groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$

Définitions de $GL(E)$, identification au groupe de matrices. Définition de $SL(E)$. Centre des 2 groupes. Groupes $PGL(E)$ et $PSL(E)$. Cardinaux des différents groupes. exemples. Isomorphismes exceptionnels. $SO_2(\mathbb{F}_q)$, nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$.

Références :

- TAUVEL
- PERRIN
- CALDERO