Leçon $\boxed{265}$ Fct usuelles - spéciales

I) Fonctions usuelles :

A) Exponentielle :

Déf1 : $\sum \frac{z^n}{n!}$ rayon ∞ + déf exp + notation $\exp(z) = e^z$

THM2 : $\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $\forall z$, $\exp'(z) = \exp(z)$

Prop3 : $e^{a+b} =$, $e^a \neq 0$, $(e^a)^{-1} = e^{-a}$, $|e^a|$, $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

THM4 : $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ morphisme de grpe surjectif, non injectif

Appli5 : intégrale de Gauss

THM5 $\left|\begin{array}{l}(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{U}, \times) \\ t \longmapsto e^{it}\end{array}\right.$ morphisme de grpe surjectif, de noyau $a\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}^*_+$

Déf6 $a = \pi$

Prop7 : $(\mathbb{C},+) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{C}^*, \times)$ de ~~noyau~~ noyau $2i\pi\mathbb{Z}$

• exp est périodique de période $2i\pi$.

Prop8 : $\exp_{|\mathbb{R}}$ est positive, strictement croissante et $\exp(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, $\exp(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0$

+ déf de $\ln$ sur $\mathbb{R}^*_+$

Déf9 : pour $x \in \mathbb{R}^*_+$, $z \in \mathbb{C}$, $x^z := \exp(z \ln(x))$ d'où la notation e^z

où e est défini comme $\exp(1) =: e$

Rem : on retrouve exp dans les 1ères éq diff / densité $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ en proba ; dans $\mathcal{S}$, $\widehat{g_{(0,1)}}(t) = e^{-t^2/2}$ une prop remarquable : T. F gaussienne reste une gauss

[TAU] p. 43 45

[RUD] p. 1

B) Logarithme :

[AMN 2]

Déf10 : argument de $z \in \mathbb{C}$

détermination continue de l'arg. sur $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert

Ex11 : sur $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la dét. princip de l'arg est $\operatorname{Arg}(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) \in]-\pi, \pi[$

Déf12 : log de z + dét. continue du log

Prop13 : • $f(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ où θ dét. cont. de l'arg

• U connexe $\Rightarrow$ 2 dét cont. du log sont $=$ à $2ik\pi$ près.

Ex14 : dét princip. du Log $= \ln|\cdot| + i\operatorname{Arg}(\cdot)$ défini sur Ω_0

THM15 : $U \subseteq \mathbb{C}^*$ ouvert connexe, • f prim de $z \mapsto 1/z$ sur U

• Si $z \mapsto 1/z$ admet une prim, c'est une dét cont. du log sur U

[TAU]

Csq16 : $\forall |z| < 1$, $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$

Appli18 : $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ tq $z_n \to z$, $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^z$ + rem : utile dans la preuve du TCL ♥

Déf18 : $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ déf sur Ω_0, + on peut définir d'autres dét cont. de z^α avec d'autres log..

C) Trigonométrie : $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

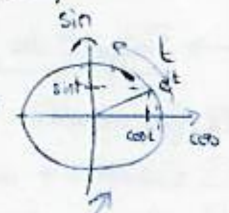
[TAU] cos on a tout mis dans $\mathbb{C}$

Déf19 : cos / sin (+ ch, sh) (avec $\mathrm{Re}(\cdot) / \mathrm{Im}(\cdot)$) + 2π-périodiques

Prop20 : $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$, $\sin(z) = \ldots$

Rem21 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos t + i \sin t$ d'où la représentation

cos paire, sin impaire sur $\mathbb{R}$



THM22 : cos, sin holom. sur $\mathbb{C}$,

$\cos'(z) = -\sin$, $\sin'(z) = \cos z$

Prop23 : $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ (+ rem : sur $\mathbb{R}$ on retrouve Pythagore)

→ variations de cos / sin sur $\mathbb{R}$ + déf arccos / arcsin + dérivée } je trouve pas de réf bien

II) Fonction Γ d'Euler.

A) Déf - 1ère prop de Γ :

→ sur $\mathbb{R}$:

[GOU] p. 315

Déf24 $\Gamma(x) = \ldots$

THM25 : 1) Γ bien définie sur $\mathbb{R}^*_+$

2) $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$

3) $\forall x > 0$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} 1/x$

4) Formule d'Euler-Gauss : $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$

Dév 1

Prop26 : Γ est strictement cvx et log-cvx ; et on peut en déduire ses variat° (cf annexe)

Déf27 : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, $\forall x, y > 0$

Prop28 : $B(x,y) = B(y,x)$; $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x;y)$ et $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

→ sur $\mathbb{C}$:

[QUE] p. 319

THM29 : • Γ se prolonge en une fct holom. sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$

• $\forall z \in \Omega$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; la formule d'Euler-Gauss reste valable sur Ω.

Rem30 : Grâce à la relation $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots$ on peut définir de proche en proche une extension holomorphe de Γ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$

265 Suite

II) B) Applications en proba :

Déf31 : $X \sim \Gamma(p,\lambda)$

Rem32 : $\Gamma(1,\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$

Prop33 : $\mathbb{E}(\ )$, $Var(\ )$, $\varphi_X(t) =$

Prop34 : • n v.a. ind de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, ~~leur~~ somme $\sim \Gamma(n,\lambda)$

• $(Y_1,\dots,Y_n)$ n va ind de loi $\mathcal{N}(0,1)$ $X = \sum Y_i^2 \sim \Gamma(n/2, 1/2)$ aussi appelée loi du χ_n^2

Rem35 : $\mathcal{E}(\lambda)$ modélise la durée de vie d'un organisme, mais en supposant l'absence de vieillissement (processus sans mémoire)

→ Réalise : durée de vie $\Gamma(p,\lambda)$, $p \geq 1$, $\lambda > 0$.) ex 7 FOA

calculs de probas

[FOA] p. 188

III) Étude des polynômes orthogonaux.

A) Déf - 1ère prop.

Déf36 : poids + $L^2(I,\rho)$ + $\|\cdot\|_\rho$

Rem37 : $L^2(I,\rho)$ Hilbert avec $\langle f,g\rangle = \dots$

THM38 : Existence unicité de polyn ⊥

Prop39 : $P_n = (X-\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, avec $\lambda_n =$, $\mu_n = \dots$

Ex40 : Hermite, Laguerre, Legendre

Prop41 : $\forall \rho :]a,b[\to \mathbb{R}$ poids, P_n possède n zéros ≠ dans $]a,b[$

THM42 : $f \in E$, $\exists ! r_n \in \mathcal{P}_n$, $\|f - r_n\| = d(f, \mathcal{P}_n)$, $r_n(x) = \dots$

THM43 : Si $]a,b[$ bornée $(P_n)_n$ base hilb, i.e $\|f - r_n\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Rem44 : faux si $]a;b[$ non borné

THM45 : densité polyn ⊥ .. Dév2

Appli46 : base hilb. de $L^2(\mathbb{R})$

[DEM] p. 52 - 56

[BEC]

B) Appli en intégrat° numérique :

expliquer subdivisions avec ou non...

Principe47 : $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continue, on cherche une approx de $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. ~~On note $x = x_0 < x_1 < \dots < x_k = \beta$ subd de $[\alpha,\beta]$~~

La méthode sera de la forme $\int_\alpha^\beta f \simeq \sum \alpha_i f(x_i)$, $x_i \in [\alpha,\beta]$

~~$\hookrightarrow \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j f(\xi_j)$ où $\forall j \in [0,\ell]$, $\xi_j \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $\sum_{j=0}^{\ell} \omega_j = 1$~~

Déf48 : La méthode de quadrature ↑ est d'ordre N si la formule est exacte $\forall f \in \mathcal{P}_N$ et inexacte pour au moins 1 $f \in \mathcal{P}_{N+1}$

Déf49 : (Méthode de Gauss) : Pour $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ poids sur $]a;b[$ on a une méthode du type $\int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$, $x_j \in [\alpha,\beta]$

pas pour simple

THM50 : ∃ ! choix des x_j et des λ_j tq la méthode soit d'ordre $N = 2\ell+1$. Les $x_j \subset]\alpha;\beta[$ et sont les racines du $(\ell+1)^{ième}$ polyn ⊥ pour le poids ω.

[DEM] p. 76 - 80

Rem51 : intérêt méthode = ...

• Complexité du calcul des polyn ⊥ fait qu'en pratique cette méthode est utilisé pour les pts : $\omega(x) = 1$ sur $[-1;1]$ (Gauss-Leg) $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $]-[$ (Gauss-Tcheby) (+ formule x_j, λ_j) ?

Réf : • [TAU] (I) (+ [RUD] pour exp$|_{\mathbb{R}}$)

II • [GOU] + [QUE] (II)A

• [FOA] - Foata - Fuchs, Calculs de probas (II)B

• [DEM] (+ [BEC] dév2) (III)