$\boxed{262}$ CV de v.a.

On considère toutes les v.a. considérées définies sur le m̂ esp. proba $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ avec $|\cdot|$ norme sur $\mathbb{R}^d$

I) Premiers modes de CV :

(pour l'organisat°, on pourrait mélanger les modes de CV et Thm limites qui vont avec mais c'est + casse-tête je trouve)

A) CV p.s

Déf1 : CV p.s

Prop2 : $X_n \xrightarrow{p.s} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} \{|X_n - X| < \varepsilon\}\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq m} |X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$ [B.L] p. 115 – 119

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} |X_n - X_m| < \varepsilon\right) = 1$

Rem3 : Un des outils classiques pour montrer la CV p.s est le lemme de Borel-Cantelli

THM4 : Lemme de Borel Cantelli (IV.3.5) ← si on le connaît pas besoin de le réécrire

Csq5 : $\left[\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty\right] \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.s} X$

- Si les X_n sont mutuellement indép, $\left[X_n \xrightarrow{p.s} 0\right] \Leftrightarrow \sum \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ (⇒ éven sinon les sont pas indép)

Ex6 : $(X_i)_i$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$, $U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} X_i$, $(U_n)_n$ CV p.s.

Rem7 : le 1er pt de csq5 n'est pas une équivalence : ex $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}[}$. $\forall \varepsilon > 0 \sum \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty$ mais $X_n \xrightarrow{p.s} 0$. [OUV2] p. 92

Prop8 : $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ continue. $X_n \xrightarrow{p.s} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{p.s} f(X)$ ok

B) CV en proba et CV L^p

Déf9 : CV en $\mathbb{P}$

Ex10 : $(X_i)_{i \geq 1}$ v.a.r. L^2 non corrélées tq $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $Var(X_i) = \sigma^2$, alors $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ [B.L] p. 119 – 124

- $(X_n)_n$ de loi $\mathcal{B}(p_n)$. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Leftrightarrow p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prop11 : $(X_n)_n, (Y_n)_n$ 2 suite de v.a tq $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Alors

- $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue, $\Phi(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi(X)$
- $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$ en particulier : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y$, $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$

preuve OUV / CVP
on a besoin de rien / CV p.s

~~THM12 : (C.C) $\left[\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(|X_n - X_{n+p}| \geq \varepsilon) < \varepsilon\right] \Rightarrow$~~ $(X_n)_n$ CV en proba

Déf13 : CV L^p

Rem14 : • L'espace L^p = espace des v.a. admettant un moment d'ordre p, quotientées par la relation $=$ p.s.

$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est complet (= Riesz-Fischer) dc $(X_n)_n$ CV $L^p \Leftrightarrow$ elle est de Cauchy en $\|\cdot\|_p$ avec $\|X\|_p = \ldots$

Prop15 : CV L^p $(p \geq 1) \Rightarrow$ CV en proba vers la m̂ v.a. (Markov)

Contre ex16 : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda)$, $\alpha > 0$, $X_n : \omega \mapsto \omega^{-\alpha} \mathbb{1}_{]-\infty, \frac{1}{n}]}(\omega)$
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \notin L^p$.) regarder s'il y a des ex dans [HAU]

- $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X_n, n \geq 1$ tq $X_n \sim (1 - n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1$ $\forall n$
(pour $q < p$, $\mathbb{E}[|X_n|^q] = n^{-p+q} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $X_n \xrightarrow{L^q} 0$.

II) Convergence en loi :

A) Définition - caractérisations

[CHAB] Chabanol p. 57 – 60

- déf 16 + rem : ça dépend de $\mathbb{P}_X$ pas de X + prop : $\Leftrightarrow \mathcal{C}_b \Leftrightarrow \mathcal{C}_0^0 \Leftrightarrow \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$
- Thm 17 : $\boxed{\text{Lévy}}$ (Début dév 1) [pas thm 18 a trouver une preuve...]
- Thm 19 + ex
- Prop 20
- Prop 21 + rem et éventuellement exs venant de [HAUCH]
- prop 22

B) Comparaison entre les modes de CV

[OUV] p. 92 (on peut s'en sortir avec [CHAB])

THM24 : CV p.s $\Rightarrow$ CV $\mathbb{P}$ (+ CV $L^p \Rightarrow$ CV $\mathbb{P}$)) [CHAB] p. 50

- CV $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ ss-suite CV p.s.

[CHAB] p. 60

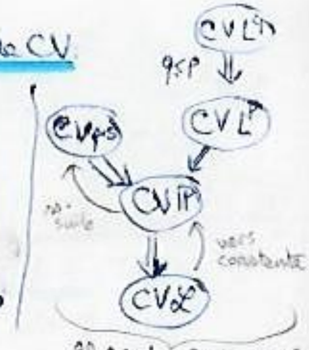
Contre ex24' : CV $\mathbb{P} \not\Rightarrow$ CV p.s. ← [HAU] p. 364

THM25 : CV $\mathbb{P} \Rightarrow$ CV $\mathcal{L}$

[HAU] p. 362 Contre ex26 : $\not\Leftarrow$

[CHAB] p. 61 Prop27 : CV $\mathcal{L}$ vers cste $\Rightarrow$ CV en $\mathbb{P}$

[HAU] p. 365 Rem28 : CV p.s $\not\Rightarrow$ CV L^p : exs v.a. $X_n \xrightarrow{p.s} 0$ mais $X_n \overset{L, L^2}{\not\to} 0$



on peut le trouver dans [HAU]

III) Thm - limites :

A) Loi des grands nombres

[CHAB] p. 53 – 56

THM29 : Loi faible des GN

Prop30 : $(X_n)_n$ v.a.r. iid tq $X_n \in L^4$, alors $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}[X_1]$

peut-être à enlever plutôt que le 31 / ou le laisser pour que le jury vous demande la preuve de ça

THM31 : LFGN

+ rajouter fct de rép. empirique + Glivenko Cantelli si on est motivé

Ex32 : • proport° de 6 obtenu au lancer de dé tend vers $\frac{1}{6}$

Rem33 : • ~~Permet~~ permet de montrer la forte consistance d'estimateurs en stat : $(\overline{X_n})_n$ estim. fortement consistant de la moyenne

Appli34 : Méthode de $\boxed{\text{Monte Carlo}}$

Rem35 : On peut obtenir un résultat de CV p.s. similaire à la LFGN mais sans supposer que les v.a. sont i.d., mais en rajoutant d'autres hyp.

~~III~~ B) TCL

[CHAB]

THM$_{37}$: Lemme de Slutsky

~~THM$_{38}$ PECK~~

[BERN]

Lemme$_{38}$: $(z_n)_n \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq $z_n \to z$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$

THM$_{39}$: T.C.L. — fin dév

Applic : détermination d'intervalles de confiance

ex : $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon de $B(1,p)$, $p \in]0;1[$, $\alpha \in]0;1[$,

$\left[\overline{X_n} \mp z_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}\right]$ est un intervalle de conf. asympt. pour p de niveau $1-\alpha$

où z_α vérifie $\mathbb{P}(|Z| \leq z_\alpha) = 1-\alpha$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

C) Thm de CV dans les CdM : ← à enlever ou pas ?

oui je maîtrise aucune preuve

Réf :

[B.L] Barbe-Ledoux, Proba

[OUV2] - Ouvrard tome 2

[CHAB] - Chabanol, Ruch, Proba et stat.

[HAU] Hauchecorne

[BERN] - Bernis. Analyse pour l'agrég. 40 dév