Plan 253 : Utilisat° de la cvxité

I) Utilisation de parties convexes

A) Notion de partie convexe : $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n.

Déf₁ : segment + $A \subseteq E$ convexe

- Rem : cvx ⇒ connexe] [GOU] p. 50

Ex2 : • étoilé ⇒ cvx

• si F ssev de E, $a \in E$, $a+F := \{a+y \mid y \in F\}$ convexe

• Dans $\mathbb{R}$, les cvx sont les intervalles.

Prop3 : A cvx, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \dots, x_n \in A$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^+$ tq $\sum t_i = 1$
$\sum t_i x_i \in A$

A, B cvx ⇒ A+B cvx

A cvx, $\lambda \in \mathbb{R}$ ⇒ $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$ cvx

Une intersection quelconque de ss-ens cvx de E est cvx

Prop4 : $\forall a \in E, r > 0$, $B(a,r)$ et $\overline{B(a,r)}$ convexes

Prop5 : $A \subseteq E$ cvx,
$\bar{A}$, $\mathring{A}$ cvx
$\mathring{A} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{A} = \bar{\mathring{A}}$, $\mathring{A} = \mathring{\bar{A}}$ ← pas trop utile...

Déf6 : conv(A) + exs conv(a, b, c) = triangle (a, b, c) ← on en a besoin pour Goursat

B) Convexité dans les Hilbert : $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

THM7 : Project° + KR (Dév 1)

Rem8 : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, KR veut dire $\forall y \in C$, l'angle entre $x - p_C(x)$, $y - p_C(x)$ obtu.

Prop9 : $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

Rem10 : on illustre ça en annexe] dessins [BEC] p. 96

- Thm reste vrai si H préhilb. et C complet

Prop11 : Cas de project° sur un ssev F,

Cor12 : $F \oplus F^\perp = E$ si F fermé, $\bar{F} = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$

Ex13 : Utilisé par ex pour mq les polyn. ⊥ forment une base hilb. de $L^2(I, \rho)$ ou encore que $\mathcal{F}_2(L^2) = L^2$ où $\mathcal{F}_2$ transfo Fourier-Planch.

Ex14 : • sur $\ell^2(\mathbb{N})$, la project° sur $C = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \forall i\ x_i \geq 0\}$ est $P_C(x) = (\max(x_i, 0))_i$

$(M_n(\mathbb{R}), Tr({}^t \cdot\,\cdot))$ $C = S_n^+$, project° sur C = ...

[BEC] p. 97 Appli15 : Hahn-Banach géom. .... ← je pense appli cool ou au - à connaître (à enlever ?) ← sert à séparer 2 convexes par un hyperplan

C) Convexité en An. cplx :

[TAU] p. 74, 78

THM16 : Goursat

THM17 : Cauchy-cvx ← Rem17 : convexité permet d'inclure des triangles dans Ω pour appliquer Goursat.

Cor18 : Formule de Cauchy-cvx

THM19 : analyticité fct holomorphes

THM20 : Morera ← peut être enlevé

[HAS] p. 314, 316 (ou [ROD] p. 230)

II) Fonctions convexes :

A) Déf - 1ère prop :

[ROM] p. 225

Déf21 : fct (strict) cvx / concave

THM22 : f cvx ⇔ son épigraphe est cvx

THM23 : KR cvx qd $f : I \to \mathbb{R}$, la courbe en dessous de ses cordes

Ex24 : $x \mapsto |x|$ cvx ou $x \mapsto \|x\|$ sur evn

[GOU] 50, [BEC] p. 78

Ex25 : sup(fct cvx) = fct cvx avec 1 condit°...

Appli26 : $f \left| \begin{array}{l} S_n \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \lambda_{max}(A) \end{array} \right.$ cvx ← peut être enlevé

B) Caractérisation de cvxité et log-cvxité : ← en mettre un peu -

[HIR] ... [ROM]

Déf27 : log-cvx

THM28 : log cvx ⇒ cvx

THM29 : $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ log cvx ⇔ ($\forall \alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x f(x)$ cvx)
⇔ $\forall \lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda} f(y)^\lambda$
(⇔ $\forall \alpha > 0$, f^α cvx)

[HIR]

THM30 : $f : I \to \mathbb{R}$ continue est cvx ⇔ $\forall x, y$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$

THM31 : KR cvxité avec pentes et ↗ de τ_f...

Appli32 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cste ⇔ elle est cvx majorée ← enlever ?

à mettre en C) (*)

[BEC] p. 134

THM33 : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f cvx ⇔ f' ↗ ⇔ $\mathcal{C}_f$ au dessus de ses tang.

Cor34 : $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff cvx ⇔ $\forall x, y$ $(df(x) - df(y)) \cdot (x - y) \geq 0$ + autre #

Rem35 : si f 2 fois dériv. cvx ⇔ $f'' \geq 0$

Ex36 : exp, $\forall \alpha \geq 1$ $x \mapsto x^\alpha$ strict cvx, Γ = ... cvx et log cvx

Plan $\boxed{253}$ Suite cvxité

II) C) Régularité et fct cvx :

THM37 : f cvx sur $I \Rightarrow f_g'$, f_d' existent sur $\mathring{I}$, sont $\nearrow$ et $a<b \in \mathring{I}$
$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$ [ROM]

Csq38 : f cvx sur $I \Rightarrow$ continue sur $\mathring{I}$

[groupe ⊛] [ROU] 1re preuve

- Prop39 : si $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~cvx~~ 2 fois diff, f cvx $\Leftrightarrow$ $\forall x$ $Hf(x)$ positive [BEC]

$d^2f_x(x)$ ← hessienne

Ex40 : $A \in S_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ cvx $\Leftrightarrow$ A positive

voir [CHAR]

Appli41 : Méthode de Newton dans le cas f cvx [ROU]

III) Applications des fct cvx dans ≠ domaines d'analyse :

A) Inégalités de convexité et csq :

Rmq : Le thm33 permet d'obtenir des inégalités classiques à partir de fonctions convexes : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$; $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$
$\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x-1$ [ROM] p.239

+ faire dessin fct et tangente

THM43 : ≠ de Jensen (version $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$)

Ex Appli44 : ≠ des moyennes : $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ [RUD] p.78-79

+ gén : $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tq $\sum \alpha_i = 1$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^+$, $\prod x_i^{\alpha_i} \leq \sum \alpha_i x_i$

Appli45 : ≠ de Hölder + ≠ de Minkowski

Csq46 : $\forall p \in [1, +\infty]$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ e.v.n.

B) Convexité et optimisation : $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe non vide

Prop47 $f: C \to \mathbb{R}$ cvx, C ouvert. Si f diff en $a \in C$ et $df_a = 0$, alors f admet en a un min global sur C. [ROU] p.381

Prop48 : ~~Lors~~ $f: C \to \mathbb{R}$ cvx, L'ensemble des pt réalisant le min de f est convexe. [BEC] p.30

THM50 : [Unicité du min] $f: C \to \mathbb{R}$ strictement cvx. Alors $\exists$ au plus un point $x \in C$ minimisant f sur C.

Appli51 : Γ étant strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut en déduire son tableau de variations.

[BEC] p.30

Appli52 : $(F, \|\cdot\|)$ evn (éventuellement de dim ∞), E ssev de dim finie

Alors : $\forall x \in F$, $\exists x_0 \in E$ tq $\|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x-y\|$ ← existence

(non unicité du projeté)

↳ Si la norme sur F est strictement cvx, on a unicité

↖ bof… ça utilise juste la "strict cvx d'une norme", ce qui est une AUTRE déf et c'est juste le 3ème point…

C) Applications en probabilités - statistiques :

Rem53 : la prop47 peut être utilisé pour justifier que l'estimateur du max de vraisemblance existe (et est unique). Généralement, on maximise la log-vraisemblance.

↳ mettre un ex…

Rem54 : L'inégalité de Jensen peut se traduire dans un espace probabilisé : Si φ convexe, $X \in L^1$: $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$

[DEL] + [COT]

Appli55 : Processus de Galton-Watson :

Intro : On étudie la transmission d'un nom de famille au cours du tps.
On note Z_n le nbre de descendants à la gén. n issue d'un ancêtre $Z_0 = 1$.
On note ξ_i^n le nbre d'enfants de l'individu i de la gén. n

↳ $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n$ (avec $\sum_{i=1}^{0} \dots = 0$). Les $(\xi_i^n)_{i \geq 1, n \geq 0}$ sont i.i.d., $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(\xi_i^n = k) = p_k$

On suppose $0 < p_0 < 1$

Notations : $m = \mathbb{E}[\xi_i^n]$, $\forall s \in [0,1]$, $G(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_i^n}]$ fct gén. de ξ_i^n

On note $G_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$ fct gén. de Z_n, $\forall s \in [0,1]$

$q = \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} [Z_n = 0]) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$, proba d'extinction

Lemme1 : G est $\nearrow$, cvx sur $[0,1]$, si $p_0 + p_1 < 1$, G strictement convexe sur $]0,1[$

Lemme2 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G_{n-1} \circ G = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}$

THM3 : q est la + petite racine ≥ 0 de $G(s) = s$. Dev2

$m \leq 1 \Rightarrow q = 1$

$m > 1 \Rightarrow q \in]0,1[$

(et si $p_0 = 0$ il se passe quoi ?)

↳ + dessin des 2 cas de G(s) cf [COT]

Réf:

[ROM]. Rombaldi. An.

[HAS] El Hage Hassan Topo ← on peut se débrouiller avec GOU à la place.

[GOU]. Analyse ← ou enlever GOU mais se souvenir de déf de enveloppe cvx

[HIR] Hirsch

[BEC] - Beck OA.

[RUD] - Rudin (+ [TAU])

[ROU] - Rouvière ← surtout pour preuve optimisat° mais on peut se débrouiller avec BEC ROM

[COT] + [DEL] Pour G-W | aussi énoncé de la méthode de Newton