Plan détaillé |250| ($\mathcal{F}$)

I) Transformée de Fourier dans L^1 :

A) Déf - 1ère propriétés :

Déf1 : T.F. sur $L^1(\mathbb{R})$ $\qquad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$

Rem2 : T.F. sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, tous les raisonnements sont similaires.

Ex3 : $\mathcal{F}(\frac{1}{2}e^{-|t|})(x) = \dots$, $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[a,b]})(x)$, $\mathcal{F}(e^{-at^2})(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$, ~~...~~ $(x) = \dots$

Lemme4 : Riemann-Lebesgue

THM5 : $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$ lin continue

Prop6 : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f_\sigma)$, $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)_\sigma}$, $\mathcal{F}(f(\lambda\cdot))(x) = \dots$, $\mathcal{F}(\tau_a f) = \dots$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{F}(e^{ia\cdot} f)(x) = \dots$

Prop6' : formule de dualité

Prop7 : $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$ et $f' \in L^1 \Rightarrow \widehat{f'} = ix\hat{f}$
+ rem sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

Cor8 : $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^p$ tq $f^{(k)} \in L^1$ $\forall k \in [\![0,p]\!] \Rightarrow \mathcal{F}(f^{(p)}) = (ix)^p \hat{f}$

Prop9 : $f \in L^1$ tq $x \mapsto xf \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ dérivable $\to \hat{f}' = -i\mathcal{F}(xf)$

Cor10 : $x \mapsto x^\ell f$, $\forall \ell \in [\![0,p]\!] \in L^1 \to \hat{f}$ p-fois dérivable, $\hat{f}^{(p)} = (-i)^p \mathcal{F}(x^p f)$

[El.Am.F] p. 109 - 113

B) Inversion :

à mettre
(si on veut rallonger mettre déf $*$
+ $f, g \in L^1 \Rightarrow f*g \in L^1$, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
+ m̂ lemme des petites translations...)

Prop11 : $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Déf12 : approximat° de l'unité

Rem13 : construction à partir de $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$ + avec des prop de régularité en +, on obtient une suite régularisante

Ex14 : noyau de Laplace, de Cauchy, de Gauss

THM15 : $\forall f \in L^p$, $p \in [1;+\infty[$, $\varphi_n * f \xrightarrow{L^p} f$. ← à vérifier dans Lefèvre (enfin mon cours)

THM16 : $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$ est injective

THM17 : Formule d'inversion

[El.Am.F] p. 120 - 122

[El.Am.F] p. 86 - 87

[El.Am.F] p. 115 - 117

II) Extensions de la transformée de Fourier :

A) Sur $L^2(\mathbb{R})$:

THM18 : Fourier-Plancherel : $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$
$\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge de manière unique en une $\sqrt{2\pi}$-isom. $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$
$\mathcal{F}(L^1 \cap L^2)$ dense dans L^2 $\qquad$ Dév1

Cor19 : $\mathcal{F}_2(L^2) = L^2$: $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ automorphisme et $\sqrt{2\pi}$-isométrie

[El.Am.F] p. 123 - 125

Rem20 : $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_2$ coïncident sur $L^1 \cap L^2$. Pour $f \in L^2 \setminus L^1$, $x \mapsto f(x) e^{-ixt}$ est non intégrable, donc il n'y a pas de formule intégrale pour $\mathcal{F}_2(f)$

Prop21 : $f \in L^2$, $\|\varphi_a - \hat{f}\|_2 \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$, $\|\psi_a - f\|_2 \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$ où
$\varphi_a(x) = \int_{-a}^{a} f(t) e^{-ixt} dt$, $\psi_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$

THM22 : Formule de dualité dans L^2

Appli23 : Calcul de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t^2}{t^2} dt$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt \dots$] ?
$\|\mathbb{1}_{[\cdot]}\|_2^2$

[El.Am.F] p. 126 - 127

B) Sur $S(\mathbb{R})$: ← El.Am.F /ou [QUE]...)

Déf24 : $S(\mathbb{R})$

Ex25 : $x \mapsto e^{-x^2}$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$

ou alors [El.Am.F] et adapter pour rester sur $\mathbb{R}$

[QUE] p. 328

Rem26 : $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

[El.Am.F] p. 134

Prop27 : $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in S(\mathbb{R})$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n f \in S(\mathbb{R})$
$\forall g \in S(\mathbb{R})$, $gf \in S(\mathbb{R})$ et $\bar{f}$, f_σ, $\tau_a f$, $f(\cdot) e^{-ia\cdot} \in S(\mathbb{R})$

THM28 : $f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R})$ ← déf CV dans $S(\mathbb{R})$

THM29 : $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ lin. bijective, bicontinue. $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}}$

[El.Am.F] p. 134 - 136

Rem30 : La construction de $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ peut aussi se construire grâce à $S(\mathbb{R})$

THM31 : $S(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$ ⚠
+ $S(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathcal{C}_0(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty}$ (car $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'est)

III) Quelques applications :

A) Densité de polynômes orthogonaux :

Déf32 : Poids + $L^2(I, \rho)$ avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ ← espace de Hilbert

Prop33 : existence + unicité $(P_n)_n$ polyn $\perp$

Ex34 : Polyn. de Hermite

THM35 : Base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ $\qquad$ Dév2

Ex36 : $\rho = e^{-x^2} \to$ polyn. de Hermite, si I borné tt polyn $\perp$ forme base hilb.

Rem37 : Via $\left| \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}, \rho) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f\sqrt{\rho} \text{ (isométrie)} \end{array} \right.$ on obtient une base hilb. de $L^2(\mathbb{R})$.

[BEC] p. 111 - 112

III) B) Probabilité - Fonctions caractéristiques :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé

Déf38 : Fonction caractéristique — [QUÉ] p. 500

Rem38' : φ_X caractérise $\mathbb{P}_X$

Prop39 : $\bullet X \in L^p \Rightarrow \varphi_X$ est $\mathcal{C}^p$; $\varphi_X^{(p)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^p e^{itX}]$, $p \in \mathbb{N}^*$

Déf40 : CV en loi de v.a. — p. 535

THM41 : Thm de Lévy $\left(+ \ X \overset{\mathcal{L}}{=} Y \Leftrightarrow \varphi_X = \varphi_Y \ ?\right)$ — [QUÉ] p. 536

Appli42 : Thm central limite. — [QUÉ] p. 540

Réf :

[El.Am.F] - El Amrani - Analyse de Fourier

[QUÉ] - Queffélec Zuily - Analyse pour l'agrég

[BEC] - Beck - Objectif Agrég