Plan détaillé $\boxed{246}$ Séries de Fourier

I) Définitions - 1ère propriétés :

A) Fonctions 2π-périodiques :

[ElAmF] p. 170 - 173

éf-Prop1 : notat° $\mathcal{C}_{2\pi} (\subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ ← Banach muni de $\|.\|_\infty$

em2 : fct 2π-périod ⟷ fct T-périodique via $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$...

éf3 : $L^p_{2\pi}$, $\|.\|_p$ $(p \in [1;+\infty[)$ + $L^\infty_{2\pi}$

em4 : $L^2_{2\pi}$ Hilbert avec $\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ + rem on peut $\int_a^{a+2\pi}$ va...

op5 : $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L^\infty_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi} \subseteq L^q_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$

em6 : Riesz-Fischer $\Rightarrow L^p_{2\pi}$ complet (prop ?)

HM7 : $\mathcal{C}_{2\pi}$ dense dans $L^p_{2\pi}$, $\forall p \in [1;+\infty[$

éf8 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, + polynôme trigo $(\subseteq \mathcal{C}_{2\pi})$ (+ mettre un ex.)

op9 : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $L^2_{2\pi}$

B) Série et coefficients de Fourier

[ElAmF] p. 173 - 177

éf10 : $c_n(f), n\in\mathbb{Z}$, + $a_n(f)$, $b_n(f)$ ← $(f\in L^1_{2\pi})$

em11 : $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$; $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ + si $f\in L^2$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$

éf12 : Σ de F de f (avec c_n et a_n, b_n) ⚠ série formelle + $S_N(f)$

em13 : Si $P = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e_k$ polyn. trigo, $\forall k \in [-N;N]$, $c_k(P) = \alpha_k$.

(α)

op14 : prop. sur $c_n(f)$ (sauf ce qui concerne α)

+ f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$ / f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$.

éf15 : $*$ sur $L^1_{2\pi}$

op16 : $f*e_n = c_n(f)e_n$; $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$ ($g\in L^\infty_{2\pi}$) + $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$ ($g \in L^1_{2\pi}$)

HM17 : Lemme de Riemann-Lebesgue) aucune bonne réf... (pour preuve)

rajouter le truc + général : $\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(t)e^{i\lambda x}\,dx = 0$?) oui on en a besoin pour Dirichlet... (2)

sq18 : $\begin{vmatrix} L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{vmatrix}$ morphisme d'algèbre de $(L^1_{2\pi}, *)$ $(c_0(\mathbb{Z}), \cdot)$ continu de norme 1.

[GOU] p. 273

): Ex13' : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$ et 2π-périod,

$S_N(f)(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$

[ElAmF] p. 201 - 202

Prop19 : $f\in\mathcal{C}^p_{2\pi}$, $(p\in\mathbb{N}^*)$, alors $c_n(f) = \underset{|n|\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ — à déplacer ici (*) car on a besoin de 29

$\boxed{\cdot\ f\in\mathcal{C}_{2\pi},\ k\geq 2,\ c_n(f) = \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \Rightarrow f \text{ de classe } \mathcal{C}^{k-2}_{2\pi} \quad \forall x\in[0;2\pi]}$ (4)

[GOU] p. 275

Rem20 : $(S_N(f))_N$ ne CV pas forcément (vers f) : ex $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right) \in \mathcal{C}_{2\pi}$ ↳ sa S.F DV en 0

II) Différents mode de convergence :

A) Convergence en moyenne de Césaro :

[QUÉ] p. 75 - 86

Déf20 : D_N = noyau de Dirichlet

Prop21 : D_N pair, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N = 1$; $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ (prolongé en 0..)

$\cdot$ $S_N(f) = f * D_N$ + $\|D_N\|_1 \to +\infty$) ?

Déf22 : Noyau de Fejér K_N + $\sigma_N(f)$ somme de Fejér

Prop23 : $\cdot K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n$; $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \geq 0$

Dev 1

$\boxed{\cdot \|K_N\|_1 = 1 ;\ \forall\, 0<\delta<\pi,\ \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N = 0}$; $\sigma_N(f) = f*K_N = \sum_{-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$

Rem23' : K_N est qualifié de "bon noyau"

THM24 : Fejér

Csq25 : Les polyn. trigo sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}$; $L^p_{2\pi}$;

Prop26 : $\begin{vmatrix} L^1_{2\pi} \to c_0(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{vmatrix}$ est injective.

THM27 : Weierstrass (pas trigo) ← on utilise les polyn. de Tchebychoff $(T_n(\cos t) = \cos(nt))$

mettre C) avant comme ça $\boxed{f\in\mathcal{C}^1_{pm}\cap\mathcal{C}_{2\pi},\ S_N(f) \xrightarrow[N\infty]{} f}$ peut être mis

B) Convergence de la série de Fourier :

[QUÉ] p...

Prop28 : Si $\left(\sum_{-N}^{N}\alpha_n e_n\right)_N$ CVU vers f, alors $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$ et $c_n(f) = \alpha_n$,

[QUÉ] p. 86

Prop29 : $\forall f\in\mathcal{C}_{2\pi}$ tq sa Σ. F CVN (i.e. $\sum|c_n(f)| < +\infty$) est égale à la somme de sa Σ. de F.

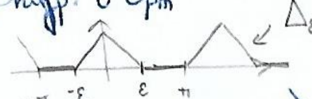
Rem29' : $f\in\mathcal{C}^2_{2\pi} \Rightarrow$ ΣF CV unif vers f (avec prop19) — preuve [illegible] avec ...

[QUÉ] p. 89, p. 91

THM30 : Dirichlet

Cor31 : m̂ thm mais hyp : f $\mathcal{C}^1_{pm}$

Ex32 : fct triangle : $\Delta_\varepsilon \in \mathcal{C}^1_{pm}$, continue



↳ $\forall t\in\mathbb{R}$, $\Delta_\varepsilon(t) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos(n\varepsilon)}{n^2\pi\varepsilon}\cos(nt)\right)$

[GOU] ou [ElAmF] p. 195

THM33 (Si on a échangé B) C))

$f\in\mathcal{C}_{2\pi}\cap\mathcal{C}^1_{pm} \Rightarrow (S_N(f))_N$ CVN vers f sur $\mathbb{R}$

(*)

[246] Suite

II) C) Convergence en moyenne quadratique:

à mettre avant B)

Rem$_{34}$: Grâce à la Csq2s, on a $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ [El.AmF] p. 193

THM$_{35}$: • $\neq$ de Bessel

• $S_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ + formule de Parseval (donner version a_n, b_n aussi)

Csq$_{36}$: $\begin{cases} L^2_{2\pi} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$ isomorphisme isométrique.

Appli$_{37}$: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue, 2π-périod, de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\int_0^{2\pi} f = 0$

Alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ avec égalité ssi $\exists a, b\in\mathbb{C}$, $f = ae_1 + be_{-1}$ [GOU] p. 275

III) Applications:

A) Calcul de sommes:

Rem$_{38}$: Explicat° ... trouver une fct tq sa ΣF vaut la somme cherchée...

+ exploiter Dirichlet ou Parseval

Ex$_{39}$: • Grâce à la fonction triangle (ex32) on peut obtenir $\sum \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ [QUÉ] p. 91

En étudiant $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$ on obtient $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$ [GOU] p. 272

Via $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a: $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ $\cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$

Puis: $\forall t\in]-\pi;\pi[$, $\sin(t) = t\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ [GOU] p. 273

B) Formule sommatoire de Poisson:

$F\in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa T.F: $\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} F(t)\,dt$ [QUÉ] p. 95

THM$_{40}$: $F\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tq: $\exists M>0$, $\alpha>1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $|F(x)|\leq M(1+|x|)^{-\alpha}$

et $\sum|\hat{F}(n)| < +\infty$. Alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\hat{F}(n)$

ou mettre version ElAm/GOU (voir qui est le + facile)

Appli$_{41}$: $\forall t>0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}$ [ElAm.F] p. 214

mettre ça → ou [GOU] p. 284

C) Équation de la chaleur:

[FRA.An4] THM$_{42}$: éq chaleur ... Dév 2

[QUÉ] rem: les Σ de F sont apparues historiquement pour résoudre des Pb similaires, comme vibrat° de cordes...

Réf:

- [El. Am-F]
- [GOU] (Analyse)
- [QUÉ] - Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrég.

(+ [FRA-An4] pour dév 2)